Параллельный алгоритм решения задач линейного программирования на базе фейеровских отображений

Цымблер Н.Ю.,
Южно-Уральский государственный университет
znat@susu.ru

III Международная конференция
«Параллельные вычисления и задачи управления» PACO`2006

3 октября 2006 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00380)

Задача ЛП

$$L: \quad \max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Введем обозначения:

i-я строка матрицы A – a_i

j-й столбец матрицы A – a^j

S-технология

- Двойственная задача ЛП:

$$L^*:\ \min\{(b,u) \mid A^T u \geq c,\ u \geq 0\}.$$

- Симметрическая задача ЛП:

$$S:\quad \begin{cases} Ax \leq b,\ \ x \geq 0; \\ A^T u \geq c,\ u \geq 0; \\ (c,x) = (b,u). \end{cases}$$

Фейеровские процессы

$$\tilde{x} = \varphi_1(x) = x - (\lambda/\delta_1)\sum_{i=1}^{m} l_i^+(x)\, a_i \qquad \textbf{(1)}$$

где $\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} \| a_i \|^2$, $l_i^+(x) = \max\{(a_i, x) - b_i, 0\}$

,

$$\tilde{u} = \varphi_2(u) = u + (\lambda/\delta_2)\sum_{j=1}^{n} h_j^+(u)\, a^j \qquad \textbf{(2)}$$

где $\delta_2 = \sum_{j=1}^{n} \| a^j \|^2$, $h_j^+(u) = \max\{c_j - (a^j, u), 0\}$

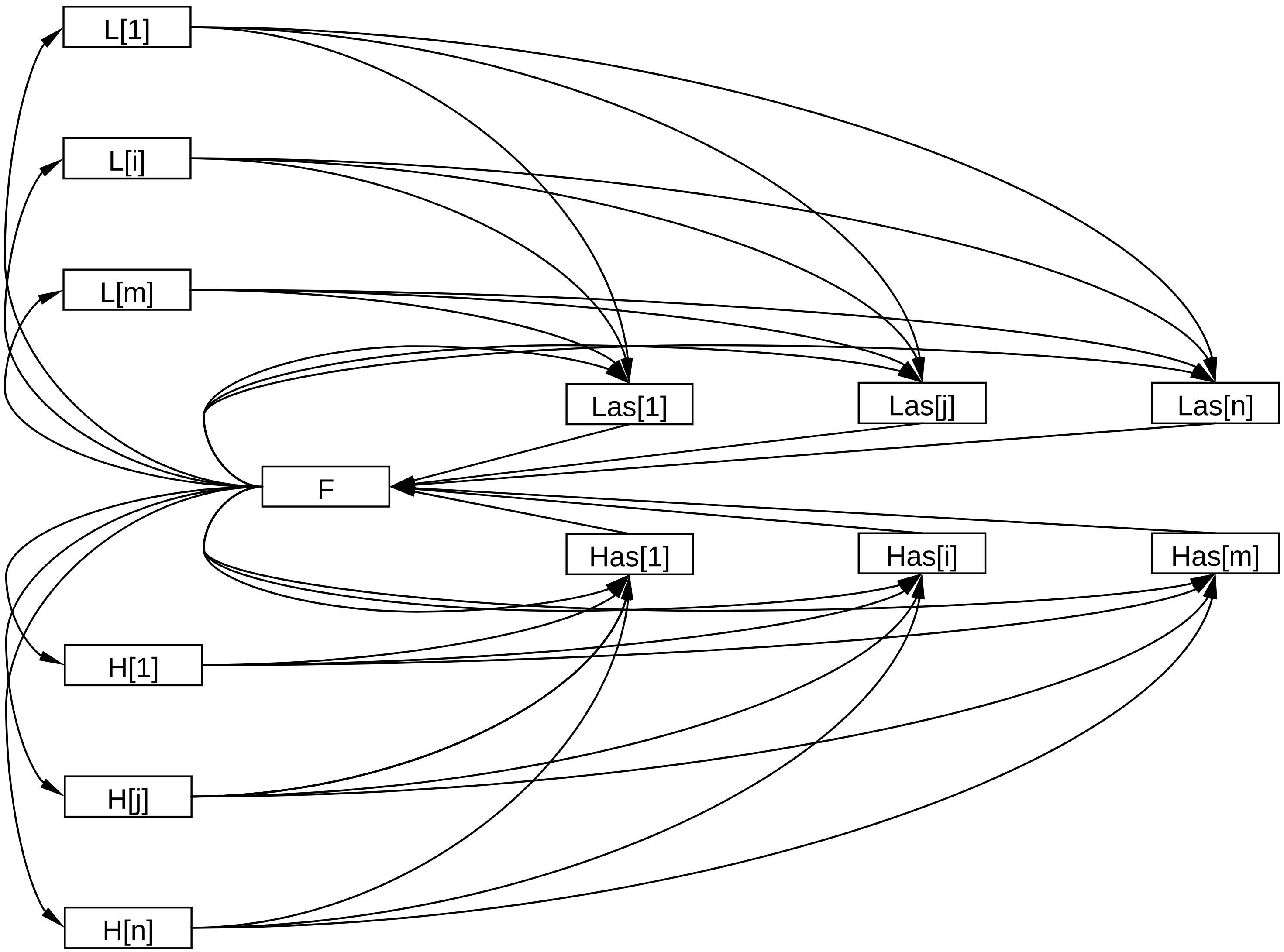
$$\varphi_3(\tilde{x}, \tilde{u}) = [\tilde{x}, \tilde{u}] - \frac{(c, \tilde{x}) - (b, \tilde{u})}{\|c\|^2 + \|b\|^2}[c, -b]. \qquad \textbf{(3)}$$

$\lambda \in (0,2)$ – коэффициент релаксации

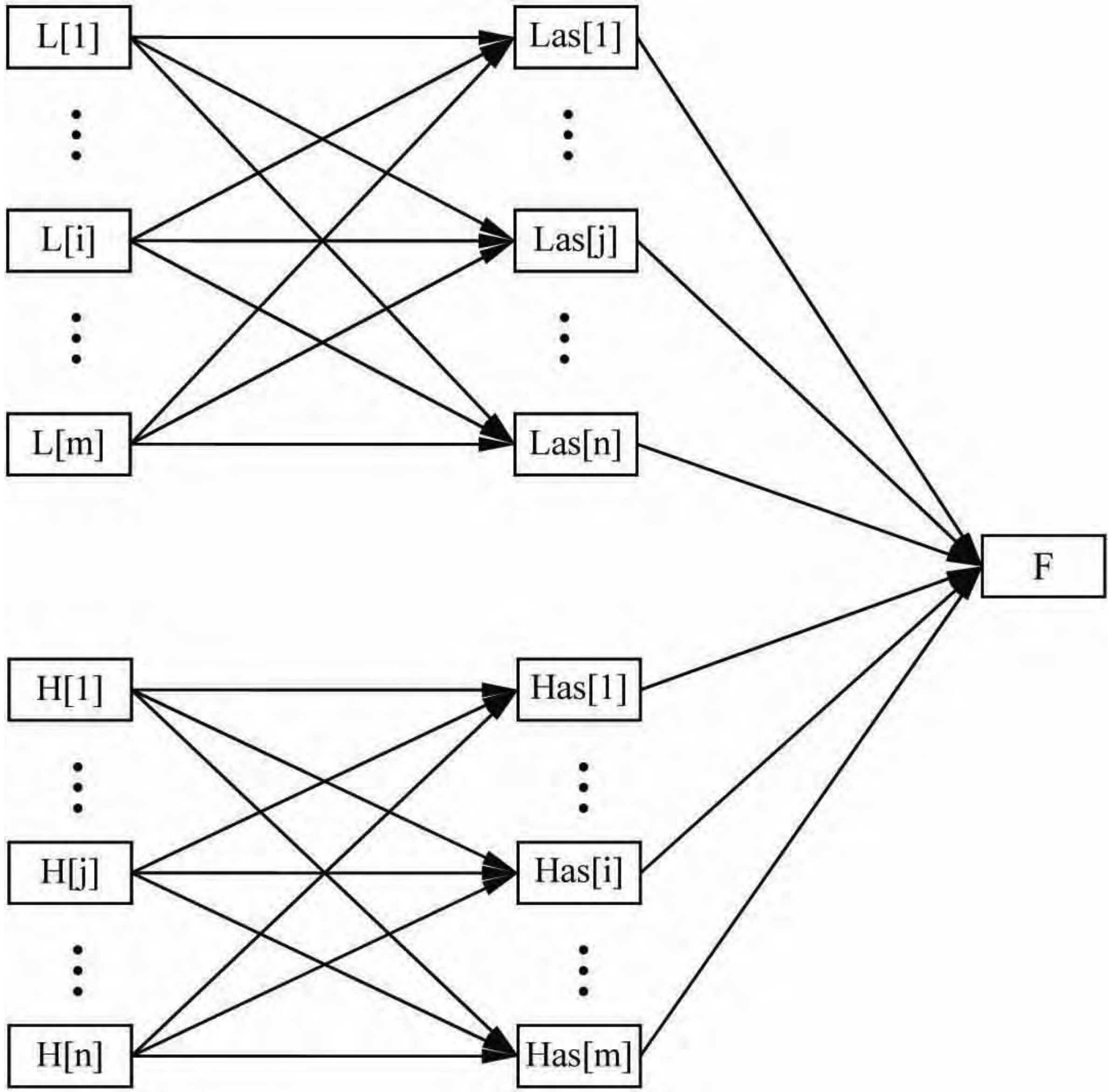
Спецификация процессов

Обозначение группы процессов	Диапазон индекса процесса	Кол-во итераций циклов	Семантика		
			Формула	Исходные данные	Вычисляемые данные
$L[i]$	$i=1,\dots,m$	n	(1)	$x[*]$, $a_i[*]$, b_i	$l_i^+(x)$
$Las[j]$	$j=1,\dots,n$	m	(1) (3)	$l_1^+(x),\dots,l_m^+(x)$, δ_1, $x[j]$, $a^j[*]$	$\tilde{x}[j]$
$H[j]$	$j=1,\dots,n$	m	(2)	$u[*]$, $a^j[*]$, c_j	$h_j^+(u)$
$Has[i]$	$i=1,\dots,m$	n	(2) (3)	$h_1^+(u),\dots,h_n^+(u)$, δ_2, $u[i]$, $a_i[*]$	$\tilde{u}[i]$,
F		$m+n$	(3)	$\tilde{x}[*]$, $\tilde{u}[*]$, $c[*]$, $b[*]$, $\lVert c\rVert^2$, $\lVert b\rVert^2$	$\varphi_3[*]$

Граф зависимостей по данным



Зависимости в пределах одной итерации



Разбиение канонического базиса

$$E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

$$E_1, \; E_2, \ldots, E_r$$

$$\bigcup_{i=1}^{r} E_i = E \qquad E_i \bigcap E_l = \varnothing \quad \forall i \neq l$$

Разбиение пространства

$$L_i = \mathrm{Lin}\, E_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \exists\, \mathbf{x}_1 \in L_1, \ldots, \mathbf{x}_\mathrm{r} \in L_r : \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_\mathrm{r}$$

Ортогональное проектирование

- Пусть π_{1i} – оператор ортогонального проектирования точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ на подпространство L_i $(i = 1, \ldots, r)$

- Пусть π_{2j} – оператор ортогонального проектирования точки $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ на подпространство L_j $(j = 1, \ldots, s)$

Отображения параллельного алгоритма

Определим отображения

$$\varphi_{1i}(\mathbf{x}) = \pi_{1i}(\varphi_1(\mathbf{x})) + \sum_{l \neq i} \pi_{1l}(\mathbf{x})$$

$$i = 1,\dots,r$$

$$\varphi_{2j}(\mathbf{u}) = \pi_{2j}(\varphi_2(\mathbf{u})) + \sum_{l \neq j} \pi_{2l}(\mathbf{u})$$

$$j = 1,\dots,s$$

Последовательные приближения

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0], \ldots, [\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t], [\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}], \ldots$$

Шаги алгоритма

1) $\mathbf{x}_{ti} = \varphi_{1i}^{k}(\mathbf{x}_t) \quad (i = 1, \dots, r)$

2) $\mathbf{u}_{tj} = \varphi_{2j}^{k}(\mathbf{u}_t) \quad (j = 1, \dots, s)$

3) $\mathbf{x}'_t = \sum_{i=1}^{r} \pi_{1i}(\mathbf{x}_{ti})$

4) $\mathbf{u}'_t = \sum_{j=1}^{s} \pi_{2j}(\mathbf{u}_{tj})$

5) $[\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{u}_{t+1}] = \varphi_3(\mathbf{x}'_t, \mathbf{u}'_t)$

Сайт проекта

Проект

«Алгоритмы и методы решения задач линейного программирования большой размерности в условиях неполных, противоречивых и изменяющихся исходных данных»

http://life.susu.ru/