ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕФОРМАЛИЗОВАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

И.М. Соколинская

Челябинский государственный университет

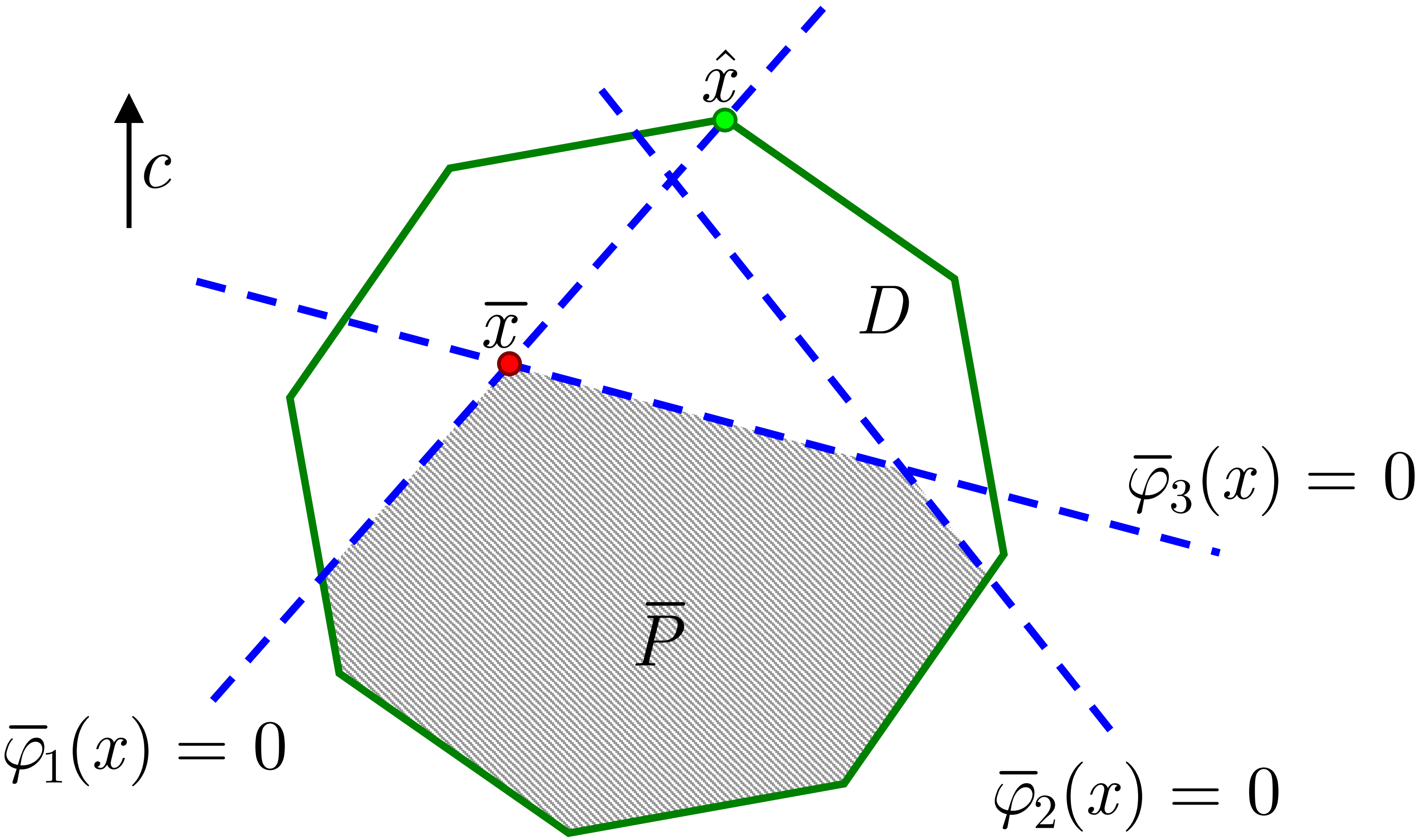
Л.Б. Соколинский

Южно-Уральский государственный университет

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00380) и
Программой поддержки ведущих научных школ НШ-5595.2006.1

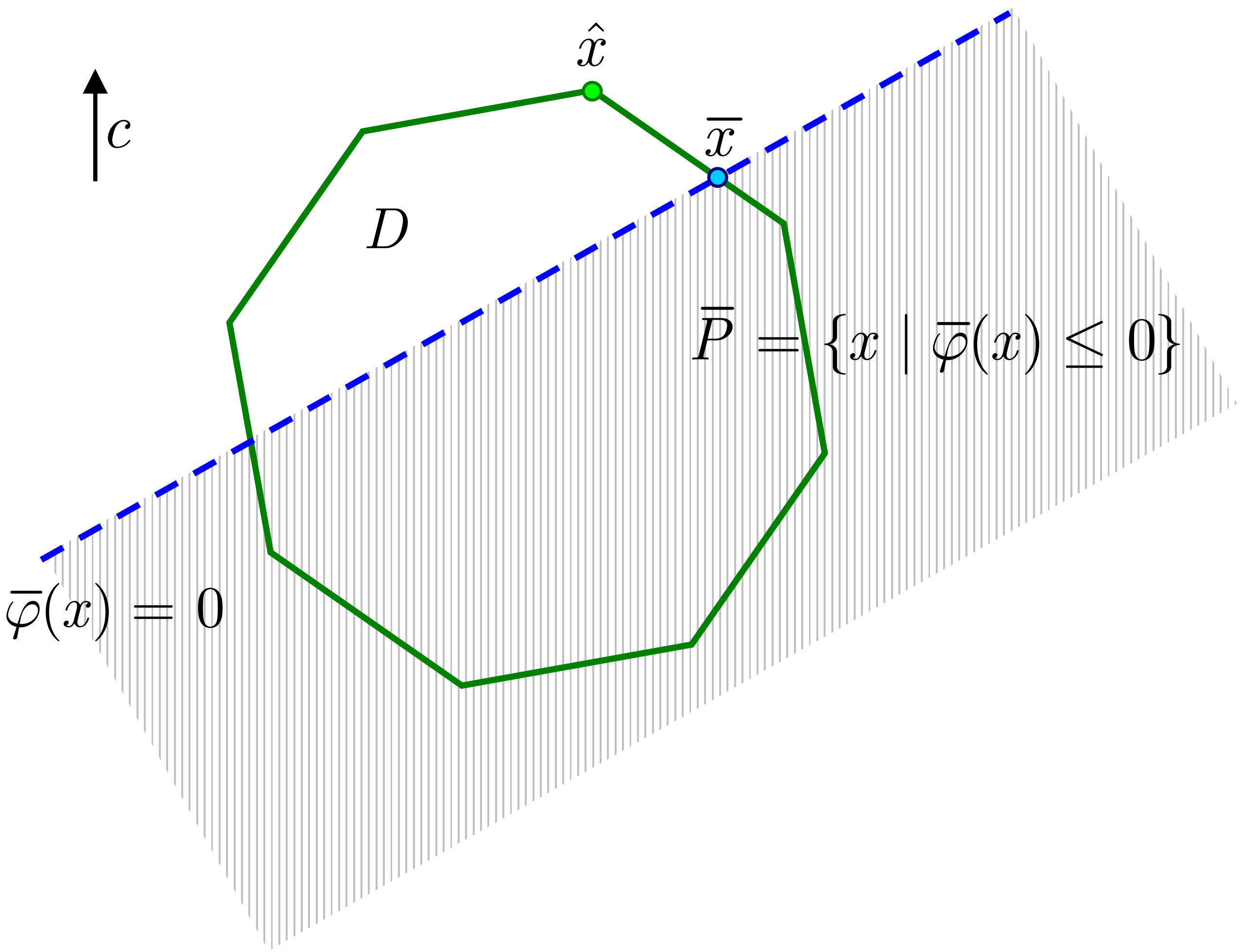
Задача линейного программирования с несколькими неформализованными ограничениями (ЛПНО*)

$$\overline{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \leq b,\ \overline{\varphi}_1(x) \leq 0,\ \ldots\ ,\ \overline{\varphi}_r(x) \leq 0\}$$



Задача линейного программирования с одним неформализованным ограничением (ЛПНО)

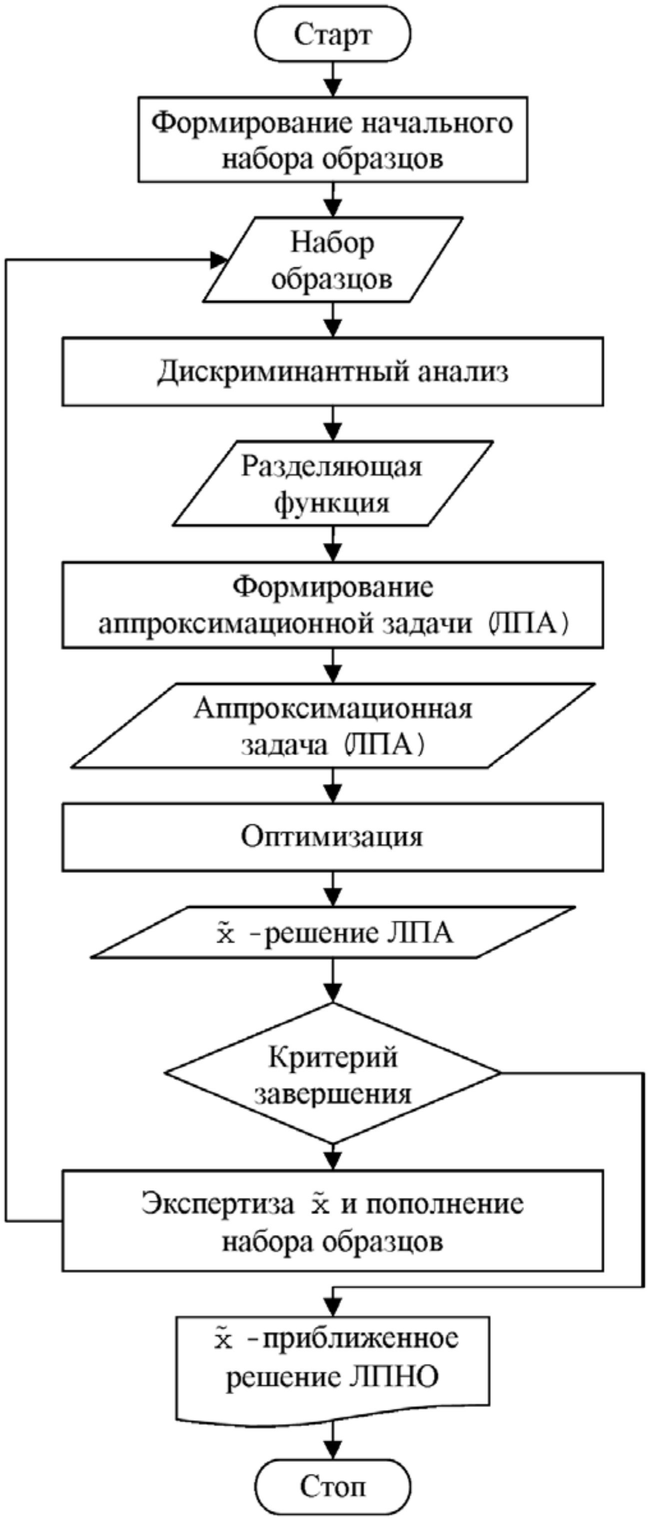
$$\overline{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}(x) \le 0\},\ x \in \mathbb{R}^n$$



Функция эксперта

$$\mathfrak{e}(x) = \operatorname{sgn}(\overline{\varphi}(x))$$

$$\begin{cases} \mathfrak{e}(x) = 1 & \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) > 0 \\ \mathfrak{e}(x) = 0 & \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) = 0 \\ \mathfrak{e}(x) = -1 & \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) < 0 \end{cases}$$



Алгоритм ЛП-ДА (Линейное Программирование – Дискриминантный Анализ)

Начальный набор образцов

$$\mathfrak{P} = \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}: \quad \begin{cases} \mathfrak{e}(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{A} \\ \mathfrak{e}(x) = -1, & \forall x \in \mathbb{B} \end{cases}$$

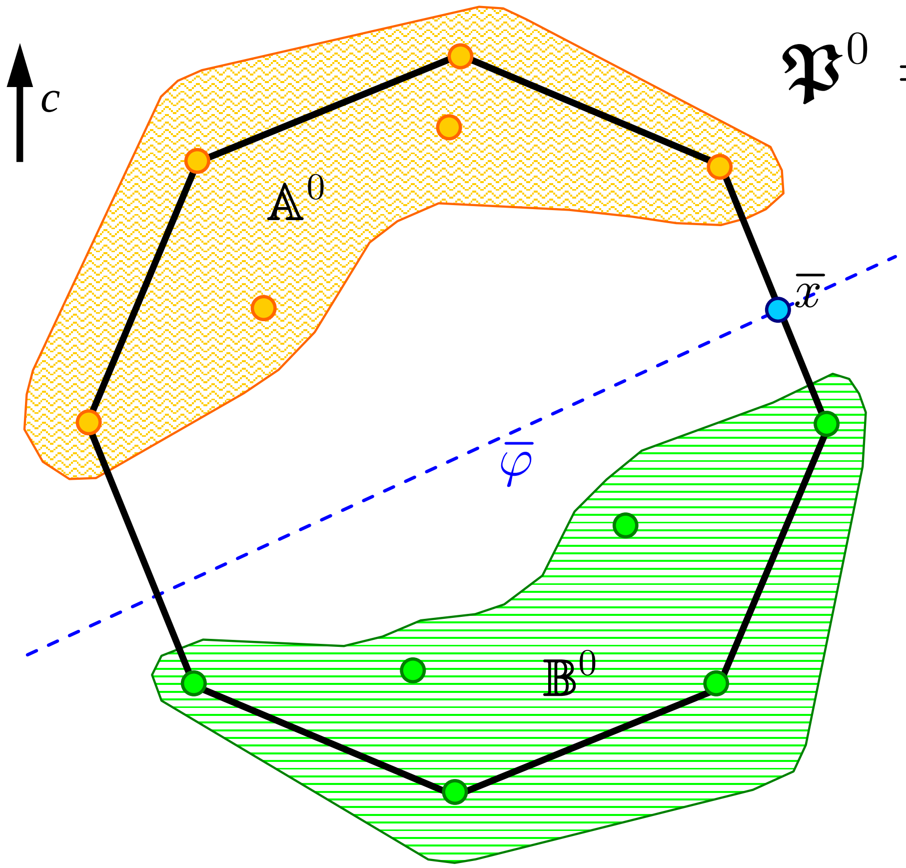
Разделяющая функция

$$\tilde{\varphi}(x): \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}(x) > 0, & \forall x \in \mathbb{A} \\ \tilde{\varphi}(x) < 0, & \forall x \in \mathbb{B} \end{cases}$$

Аппроксимационная задача:

$$\tilde{x} \in \operatorname{Arg}\max\left\{(c, x) \mid Ax \le b, \tilde{\varphi}(x) \le 0\right\}$$

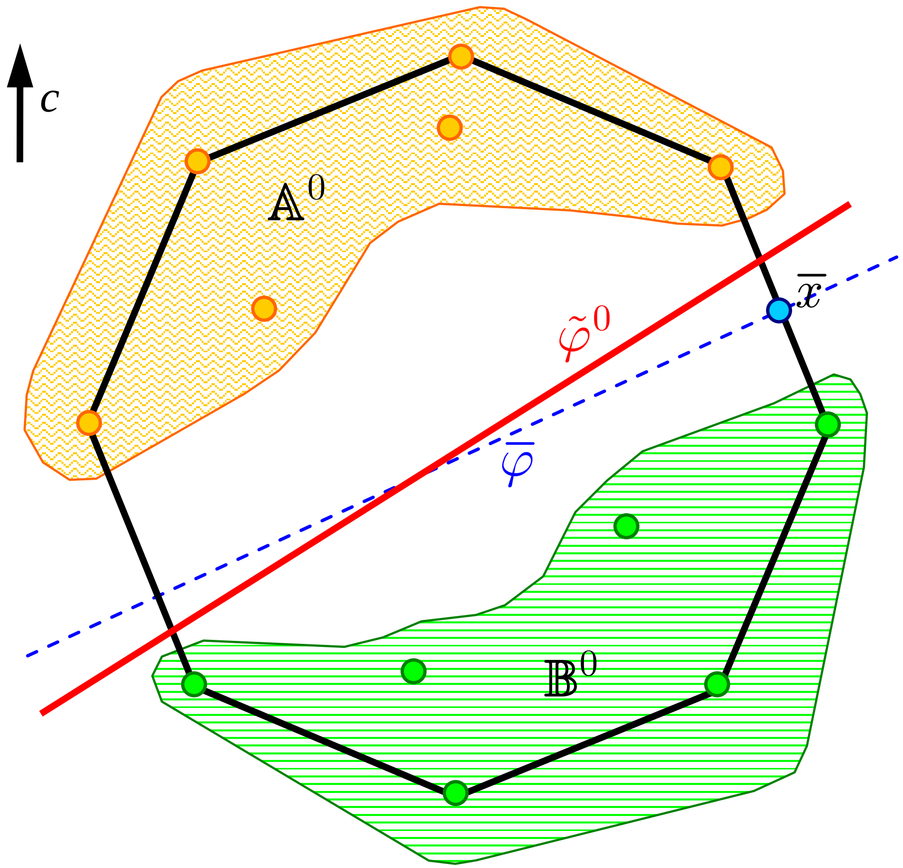
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 0: Формирование начального набора образцов



Начальный набор образцов:

$$\mathfrak{P}^0 = \{\mathbb{A}^0, \mathbb{B}^0\} : \quad \begin{cases} \mathfrak{e}(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{A}^0 \\ \mathfrak{e}(x) = -1, & \forall x \in \mathbb{B}^0 \end{cases}$$

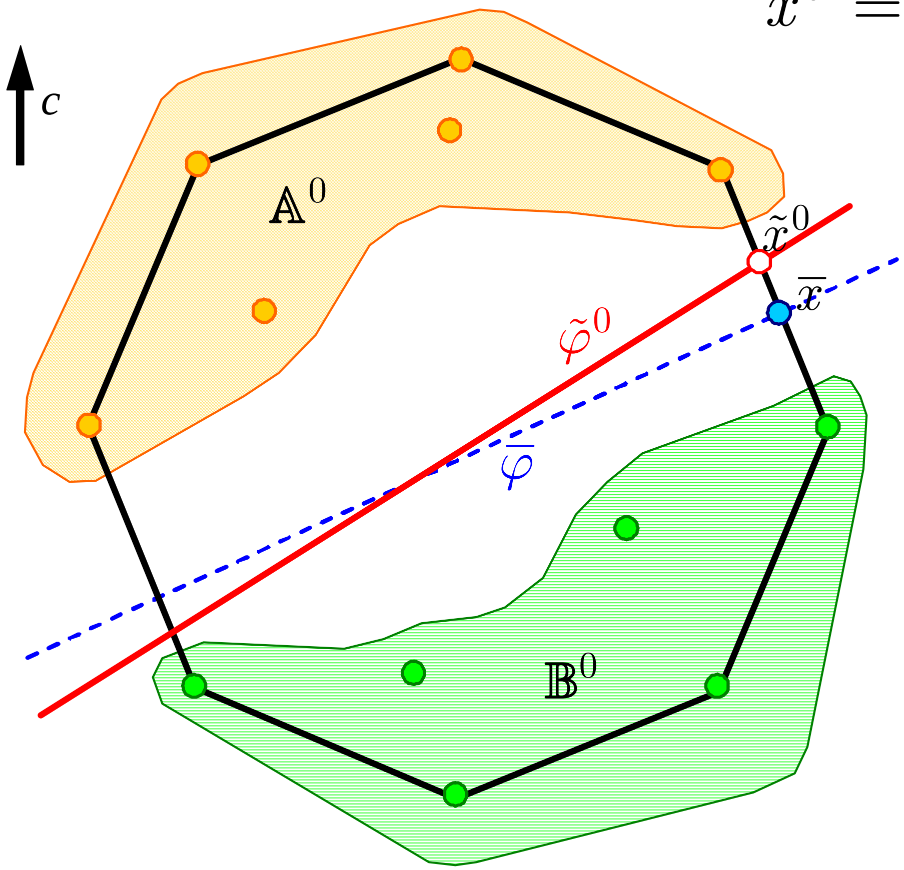
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 1: Дискриминантный анализ



Разделяющая функция:

$$\tilde{\varphi}^0 := \begin{cases} \tilde{\varphi}^0(x) > 0, & \forall x \in \mathbb{A}^0 \\ \tilde{\varphi}^0(x) < 0, & \forall x \in \mathbb{B}^0 \end{cases}$$

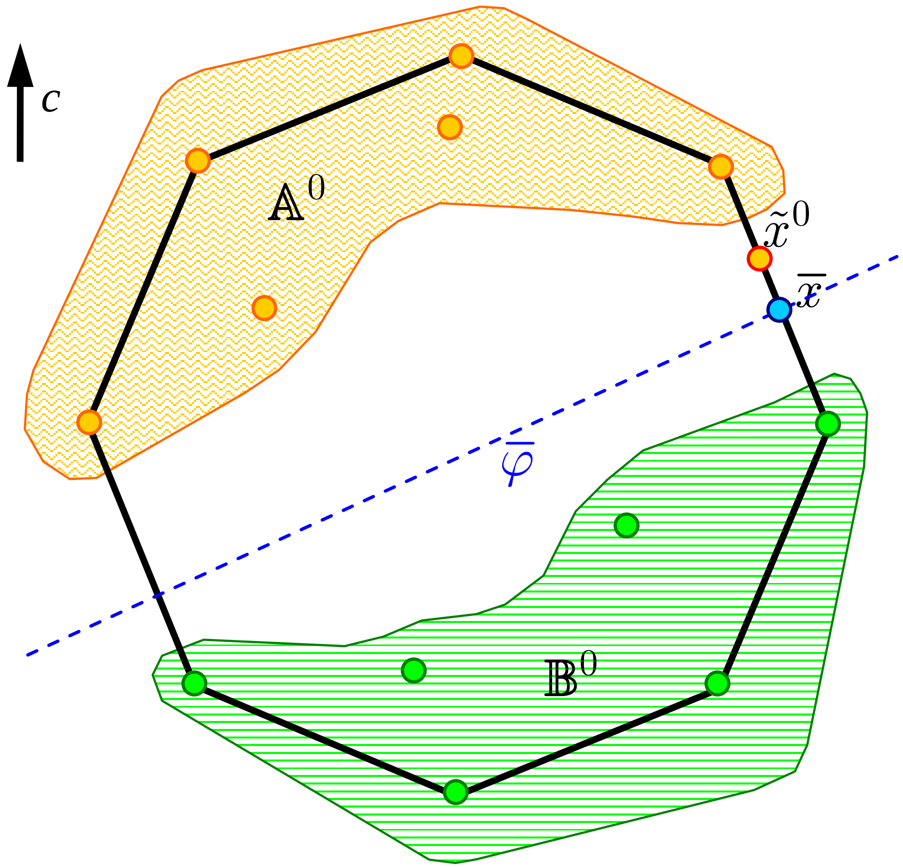
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 2: Оптимизация



Аппроксимационная задача:

$$\tilde{x}^0 = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b, \tilde{\varphi}^0(x) \le 0\}$$

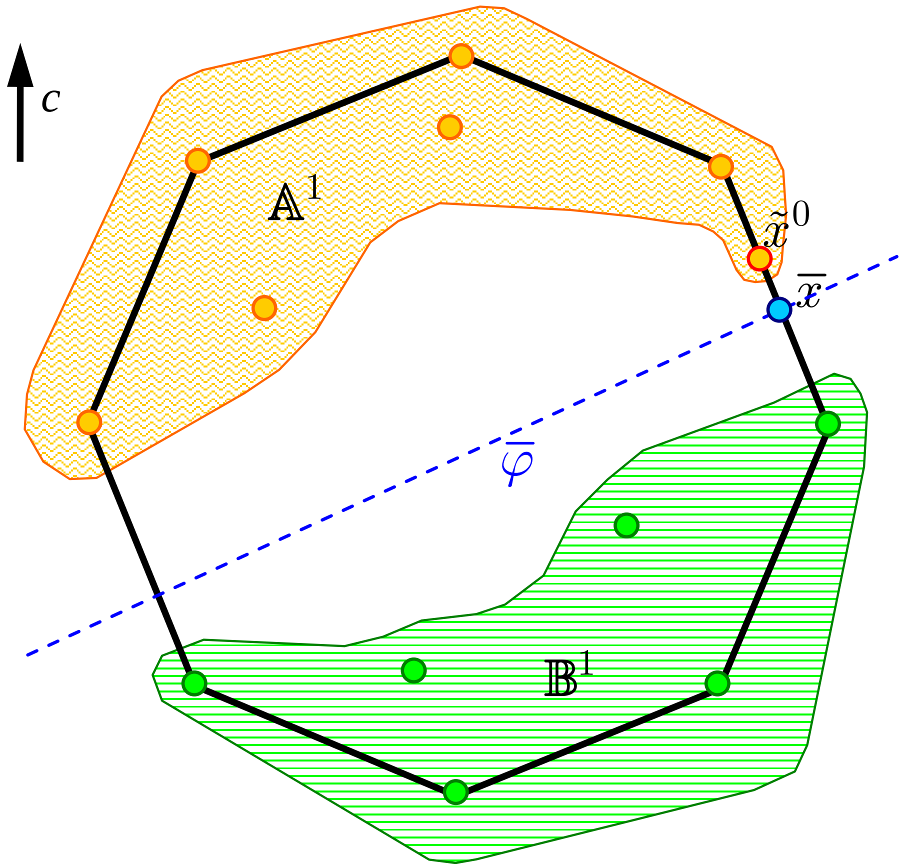
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 3: Экспертиза



Экспертиза:

$$\overline{\varphi}(\tilde{x}^0) > 0 \;\Rightarrow\; \mathfrak{e}(\tilde{x}^0) = 1$$

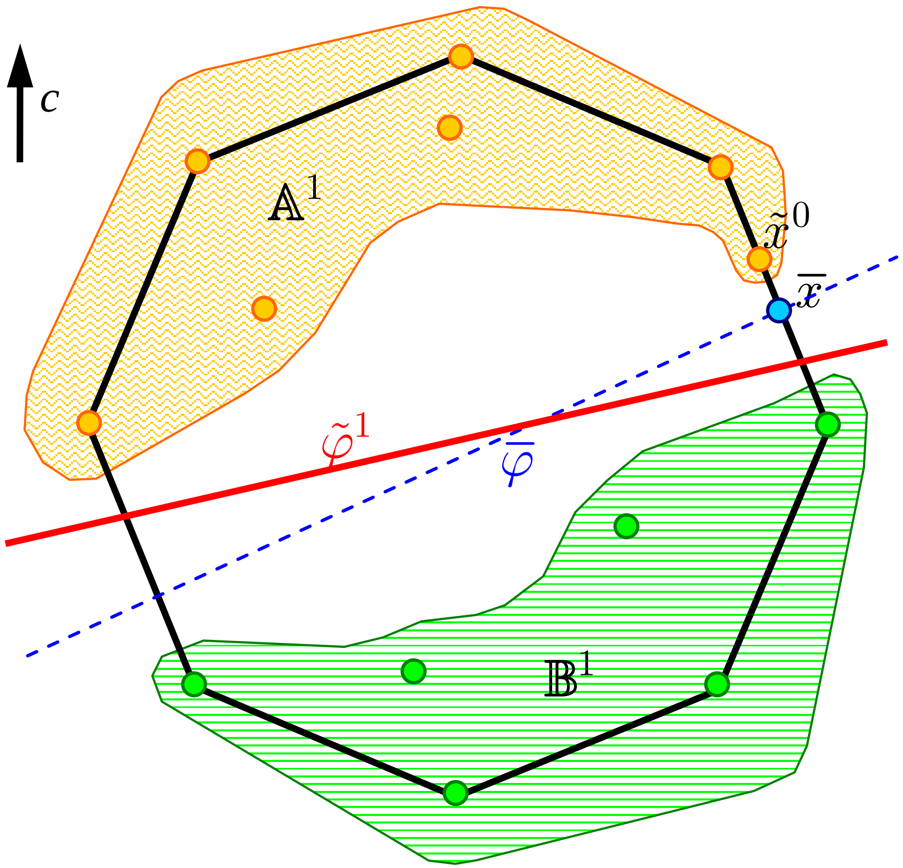
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 4: Пополнение набора образцов



Пополнение набора образцов:

$$\mathfrak{e}(\tilde{x}^0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^0 \cup \{\tilde{x}^0\} \\ \mathbb{B}^1 = \mathbb{B}^0 \end{cases}$$

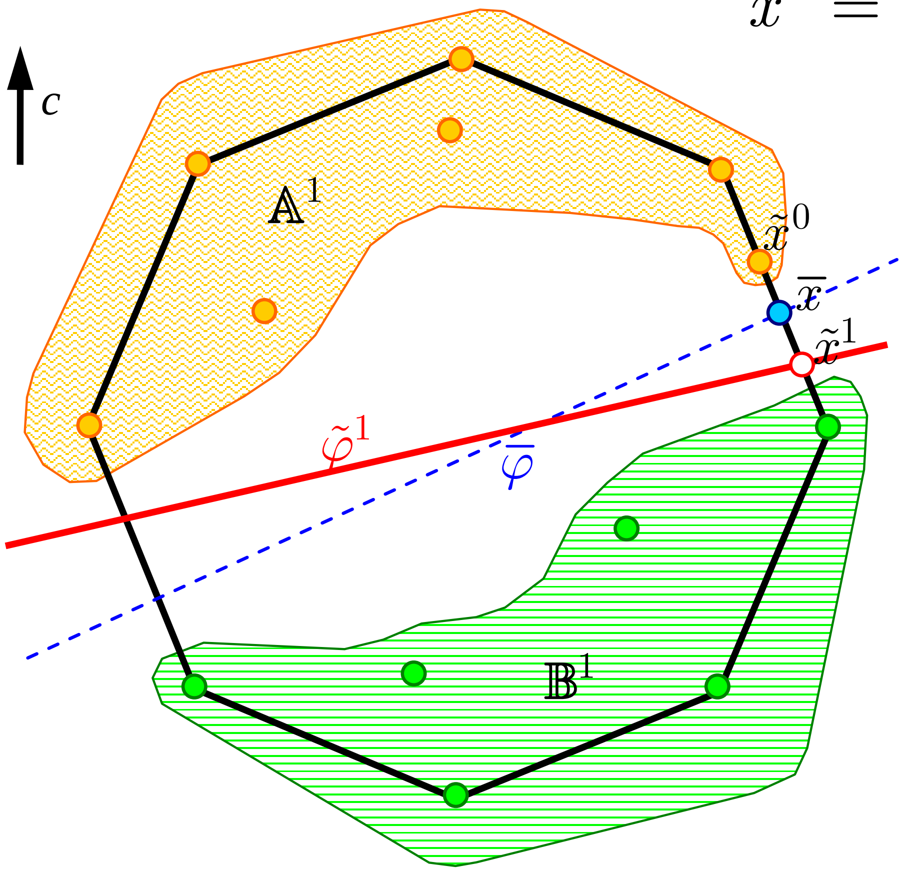
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 1: Дискриминантный анализ



Разделяющая функция:

$$\tilde{\varphi}^1 := \begin{cases} \tilde{\varphi}^1(x) > 0, & \forall x \in \mathbb{A}^1 \\ \tilde{\varphi}^1(x) < 0, & \forall x \in \mathbb{B}^1 \end{cases}$$

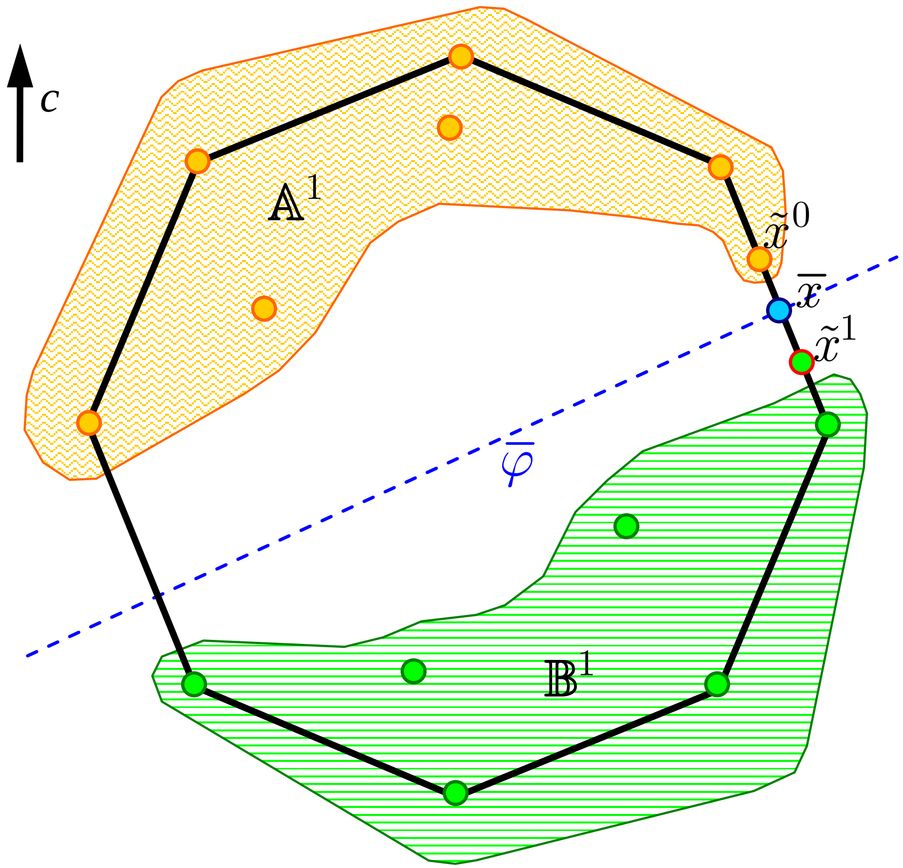
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 2: Оптимизация



Аппроксимационная задача:

$$\tilde{x}^1 = \arg\max\left\{(c,x) \mid Ax \le b, \tilde{\varphi}^1(x) \le 0\right\}$$

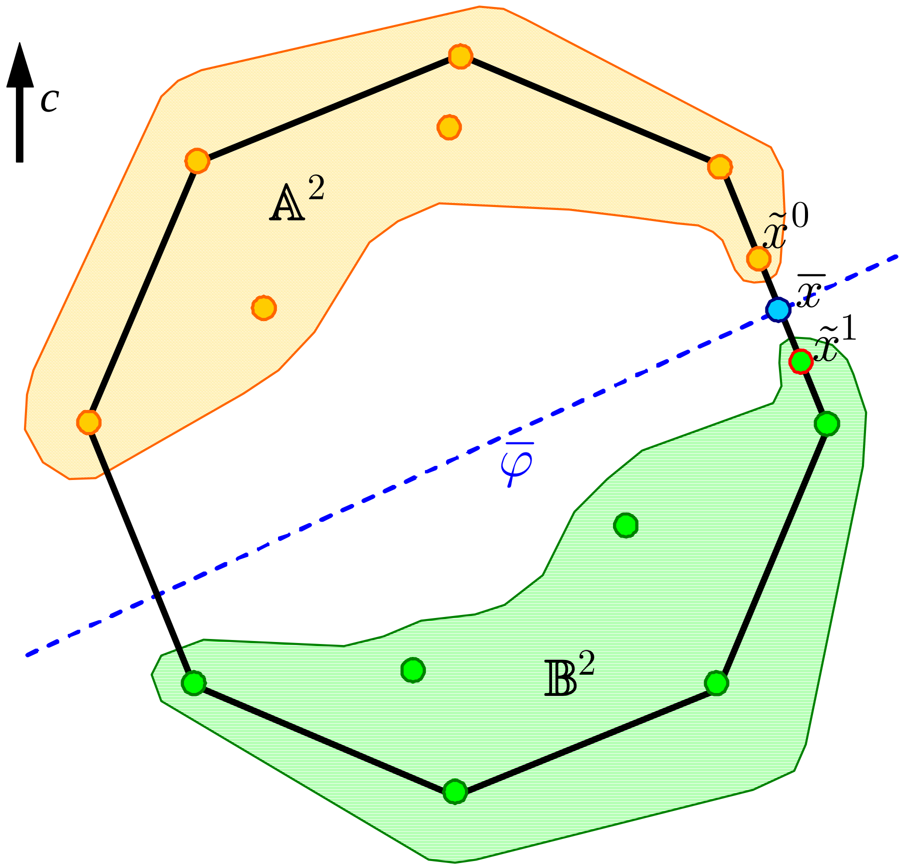
Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 3: Экспертиза



Экспертиза:

$$\overline{\varphi}(\tilde{x}^1) < 0 \;\Rightarrow\; \mathfrak{e}(\tilde{x}^1) = 1$$

Алгоритм ЛП-ДА
Шаг 4: Пополнение набора образцов



Пополнение набора образцов:

$$\mathfrak{e}(\tilde{x}^1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \\ \mathbb{B}^2 = \mathbb{B}^1 \cup \{\tilde{x}^1\} \end{cases}$$

Теорема сходимости для ЛПНО

Теорема[1]**.** Пусть $D = \{x \mid Ax \le b\}$ – телесное ограниченное множество. Пусть задача ЛПНО имеет единственное решение $\overline{x} \ne \hat{x}$, где $\hat{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b\}$. Тогда для последовательности $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^k$, порождаемой алгоритмом ЛП-ДА, имеем:

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \to \overline{x}.$$

---

[1] *Mazurov Vl.D., Sokolinskaya I.M.* Discrimination analysis and randomization in linear optimization problems with not formalized restrictions // Pattern Recognition and Image Analysis. –2006. –Vol. 16, No. 2. –P. 170-178.

Решение задачи ЛПНО*

$$\text{ЛПНО}_1 : \quad \overline{x}_1 = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}_1(x) \le 0\};$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$\text{ЛПНО}_r : \quad \overline{x}_r = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}_r(x) \le 0\}$$

$\tilde{\varphi}_i^1(x), \ldots, \tilde{\varphi}_i^k(x) -$ последовательность разделяющих функций для задач ЛПНО_i $(i = 1, \ldots, r)$.

$$\text{ЛП}^k : \tilde{x}^k \in \text{Arg}\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \tilde{\varphi}_1^k(x) \le 0,\ \ldots\ ,\ \tilde{\varphi}_r^k(x) \le 0\}$$

Теорема сходимости для ЛПНО*

Теорема 2. *Пусть задача ЛПНО* имеет единственное решение* $\overline{x}$. *Пусть каждая задача ЛПНО$_i$* $(1 \le i \le r)$ *также имеет единственное решение* $\overline{x}_i$, *причем* $\overline{x}_i \neq \hat{x}$, *где* $\hat{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b\}$. *Пусть* $\tilde{x}^k$ *– решение задачи* ЛП^k. *Тогда*

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \to \overline{x},$$

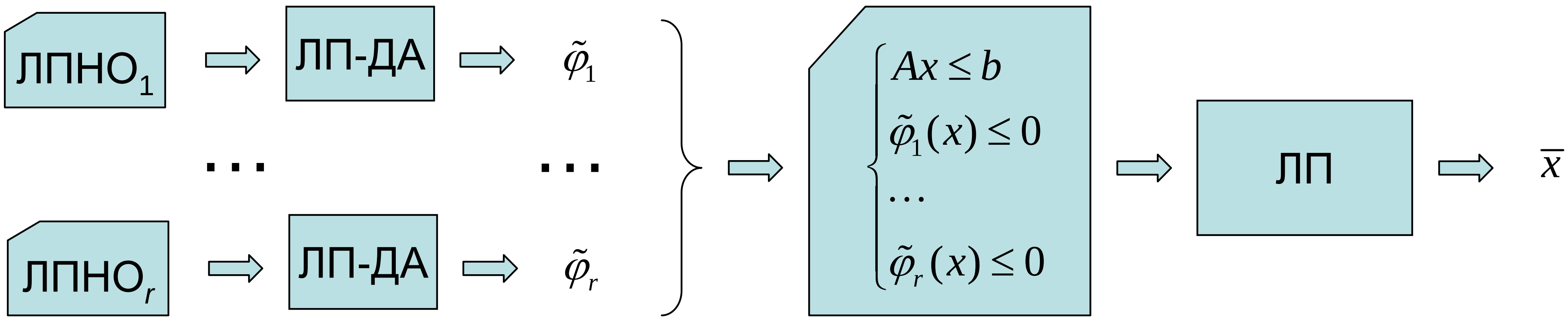
то есть при достаточно большом k *в качестве приближенного решения задачи ЛПНО* можно взять решение задачи* ЛП^k.

Схема параллельного алгоритма

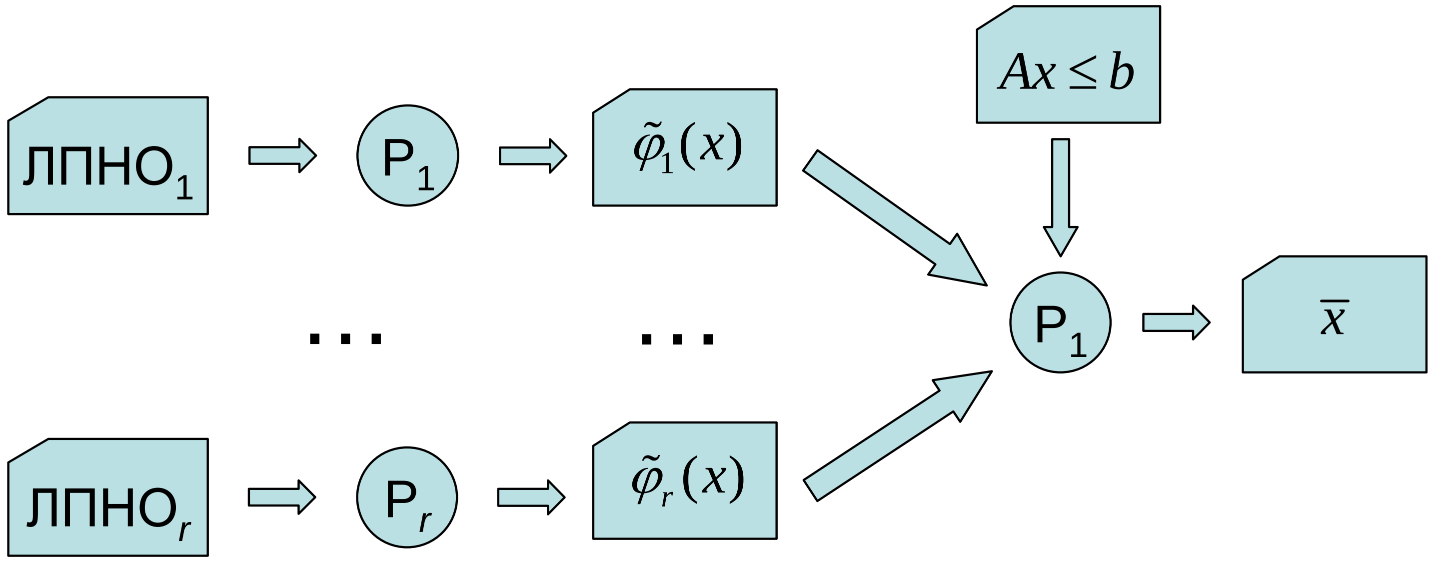
$$\text{ЛПНО}_1 : \max\left\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \bar{\varphi}_1(x) \le 0\right\}$$

$$\ldots$$

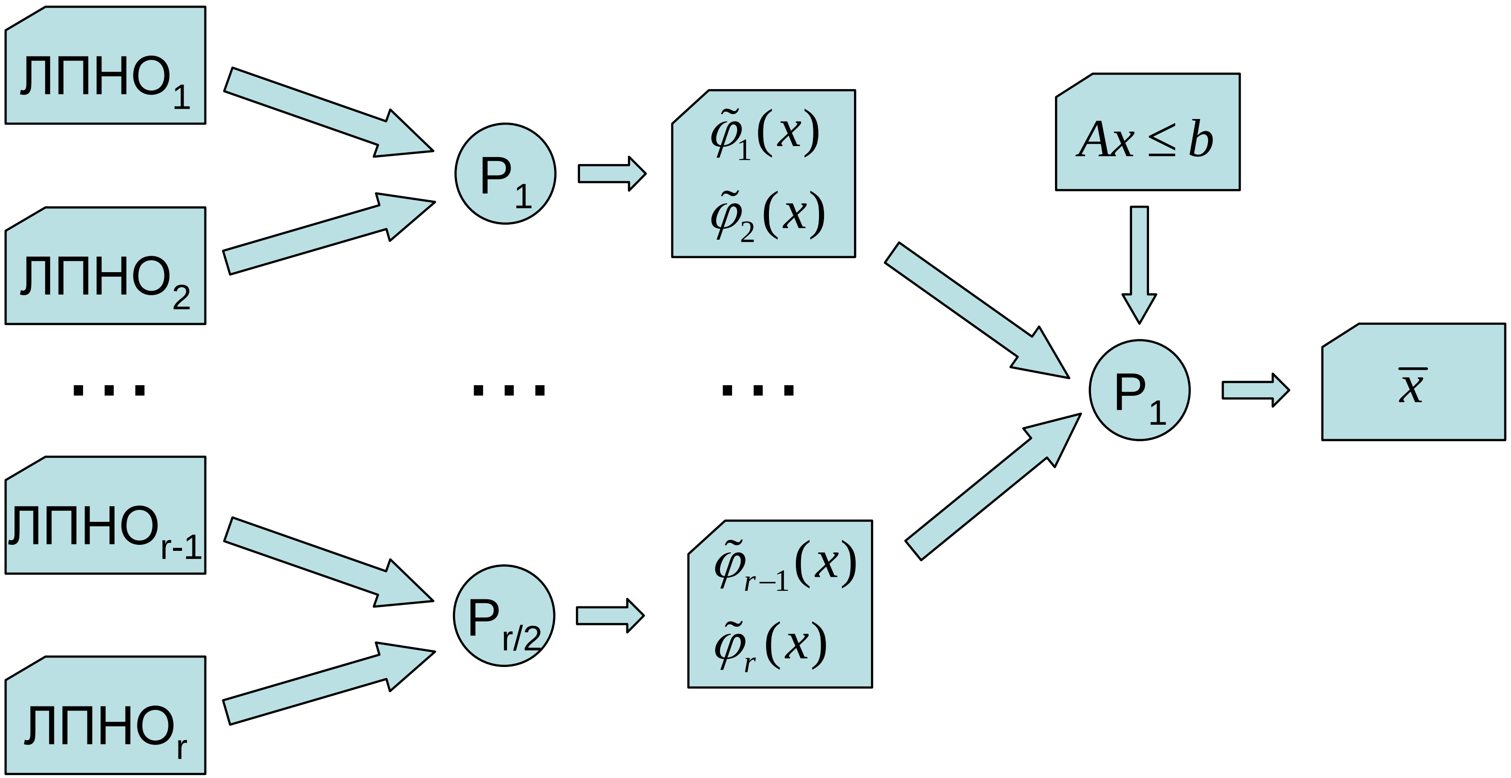
$$\text{ЛПНО}_r : \max\left\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \bar{\varphi}_r(x) \le 0\right\}$$



Одна задача ЛПНО$_i$ на процессор



Две задачи ЛПНО$_i$ на процессор



Реализация

- Выполнена реализация программного комплекса ЛП-ДА на языке Си. Общий объем кода составил около 3000 строк
  - Блок оптимизации: симплекс-метод
  - Блок дискриминантного анализа: метод линейной коррекции
- Исходные тексты программ: http://life.susu.ru/lpno/
- Реализована параллельная версия с использованием пакета MPI-2: http://life.susu.ru/lpnoMPI/

Класс задач *Mod-n**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 - 2x_3 \le 0 \\ \vdots \\ x_1 - 2x_n \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \le 8000 \\ x_1 + 2x_3 \le 8000 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_n \le 8000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

$$Q_{\max} = x_1$$

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_1(x) = \operatorname{sgn}(3x_1 - x_2 - 3000) \\ \vdots \\ \mathfrak{e}_r(x) = \operatorname{sgn}(3x_1 - x_r - 3000) \end{cases}$$

$$r \leqslant n - 1$$

n – размерность задачи
r – количество неформализованных ограничений

*Mod-n**: начальный набор образцов

$$\mathbb{A} = \{ \quad \begin{array}{l} (2500, 1250, 1250, \ldots, 1250); \\ (2500, 2750, 1250, \ldots, 1250); \\ (2500, 1250, 2750, \ldots, 1250); \\ \vdots \\ (2500, 1250, 1250, \ldots, 2750); \\ (2500, 2750, 2750, \ldots, 2750) \end{array} \quad \}$$

$$\mathbb{B} = \{ \quad \begin{array}{l} (1000, 500, 500, \ldots, 500); \\ (1000, 3500, 500, \ldots, 500); \\ (1000, 500, 3500, \ldots, 500); \\ \vdots \\ (1000, 500, 500, \ldots, 3500); \\ (1000, 3500, 3500, \ldots, 3500) \end{array} \quad \}$$

$$\left|\mathbb{A}\right| = n + 1$$

$$\left|\mathbb{B}\right| = n + 1$$

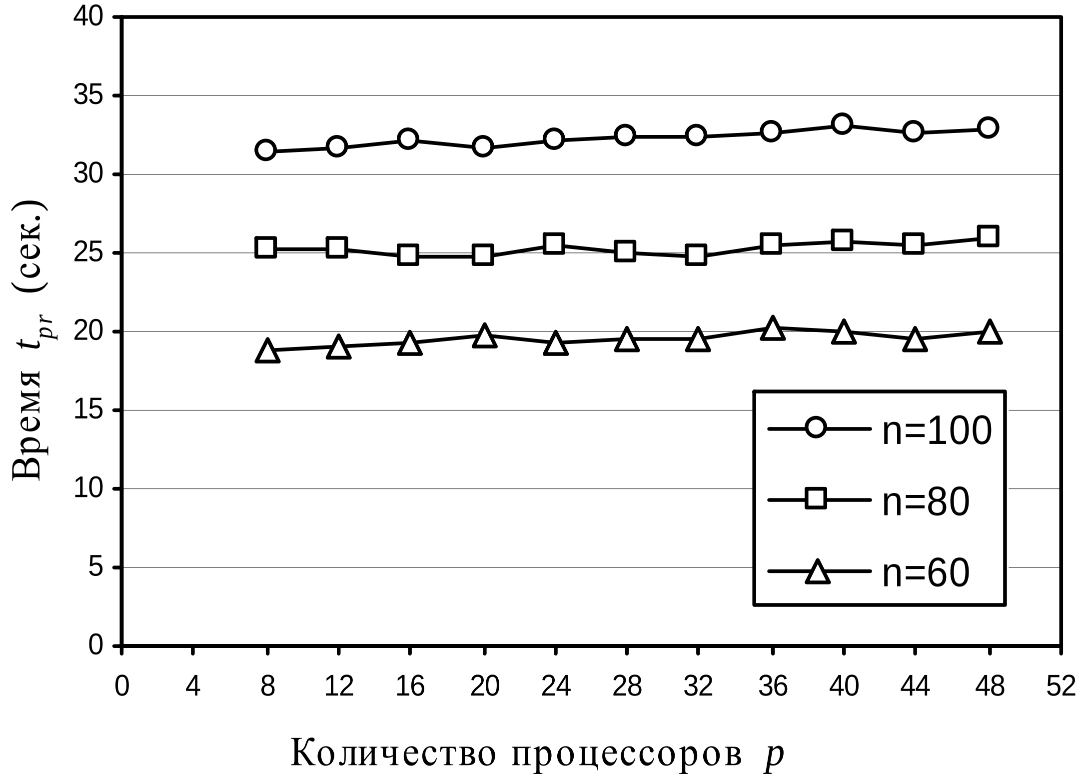
Характеристики вычислительного кластера

Количество вычислительных узлов	26	
Количество процессоров	52	
Конфигурация узла :	Процессоры	2○ Intel Xeon64 DP 3,2 GHz
	RAM	2 Gb
	HDD	80 Gb
Тип системной сети	InfiniBand (PCI-Express 4X)	
Тип управляющей (вспомогательной) сети	Gigabit Ethernet	
Операционная система	SUSE Linux Enterprise Server 9.1	
MPI-2	MVAPICH2	
Компилятор	Intel C/C++ Compiler 9.0 EMT 64	

Расширяемость

t_{pr} – время, затраченное на решение модельной задачи размерности n с r неформализованными ограничениями на p процессорах

$p = r$



Ускорение

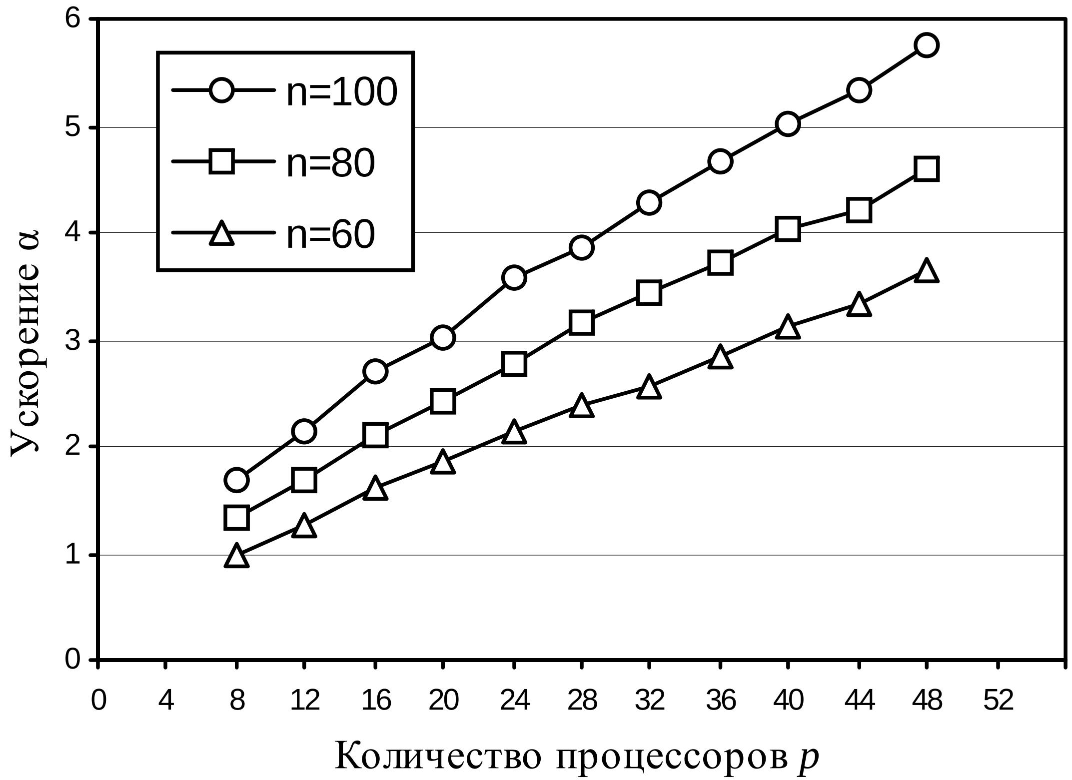
$\alpha = \alpha_0 + t_p / t_8$

t_8 – время, затраченное на решение модельной задачи размерности n с 48 неформализованными ограничениями на 8 процессорах

t_p – время, затраченное на решение этой же задачи на p процессорах

$\alpha_0 = (n - 60)/60$

$r = 48$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!