СИНТЕЗ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ И ДИСКРИМИНАНТНОГО АНАЛИЗА В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

И.М. Соколинская

Научный руководитель:
МАЗУРОВ Владимир Данилович,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-01-00565, 06-01-00380)

Цель диссертационной работы

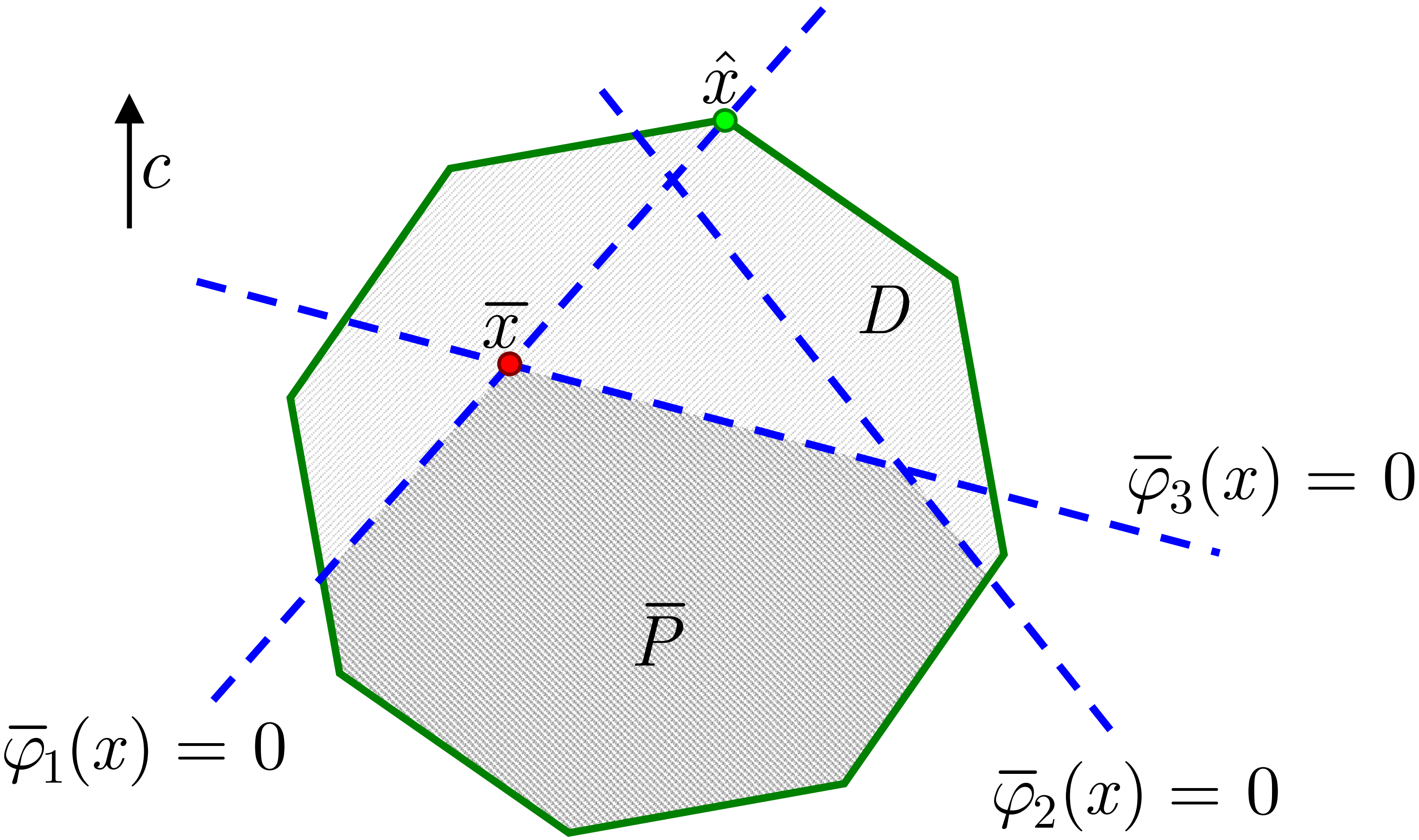
Цель работы: разработка и исследование методов и алгоритмов решения задач линейного программирования с неформализованными ограничениями и их реализации в виде программного комплекса.

Основные задачи

1. Построить математическую модель задачи *линейного программирования с неформализованными ограничениями* (ЛПНО) и описать общий подход к ее решению.
2. С использованием этого подхода разработать метод решения задачи ЛПНО, допускающий реализацию в виде алгоритма для ЭВМ, и исследовать сходимость этого метода.
3. На основе описанного метода разработать и исследовать алгоритм ЛП-ДА (Линейное Программирование – Дискриминантный Анализ), соединяющий алгоритмы линейного программирования с алгоритмами дискриминантного анализа.
4. Спроектировать и реализовать программный комплекс для решения задач ЛПНО, использующий предложенные методы и алгоритмы.
5. Провести вычислительные эксперименты для анализа эффективности предложенного подхода.
6. Разработать и реализовать параллельную версию алгоритма ЛП-ДА. Провести вычислительные эксперименты на кластерной системе.

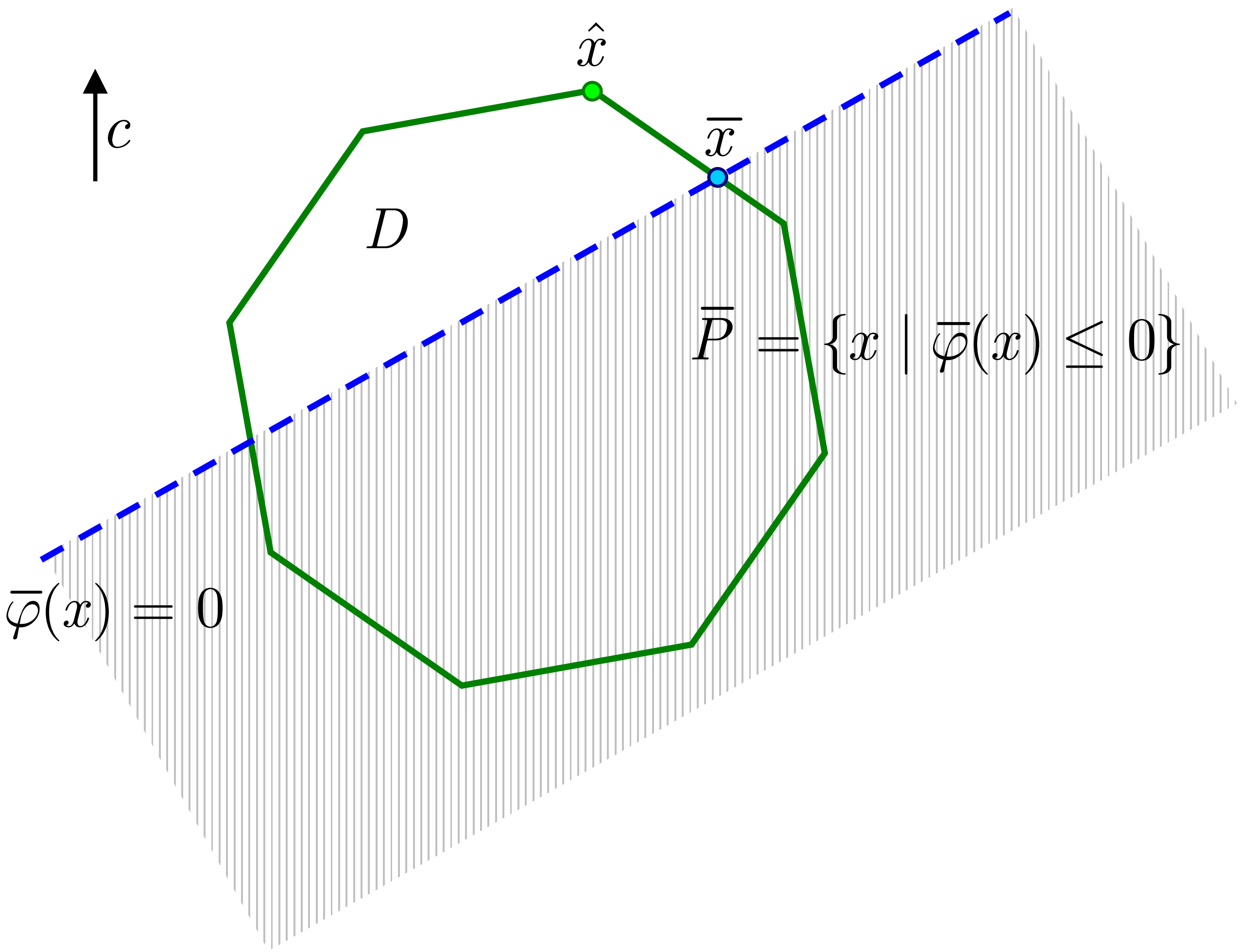
Задача линейного программирования с несколькими неформализованными ограничениями (ЛПНО*)

$$\bar{x} = \arg\max \{ (c,x) \mid Ax \le b,\ \bar{\varphi}_1(x) \le 0,\ \dots ,\ \bar{\varphi}_q(x) \le 0 \}$$



Задача линейного программирования с одним неформализованным ограничением (ЛПНО)

$$\overline{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}(x) \le 0\},\ x \in \mathbb{R}^n$$

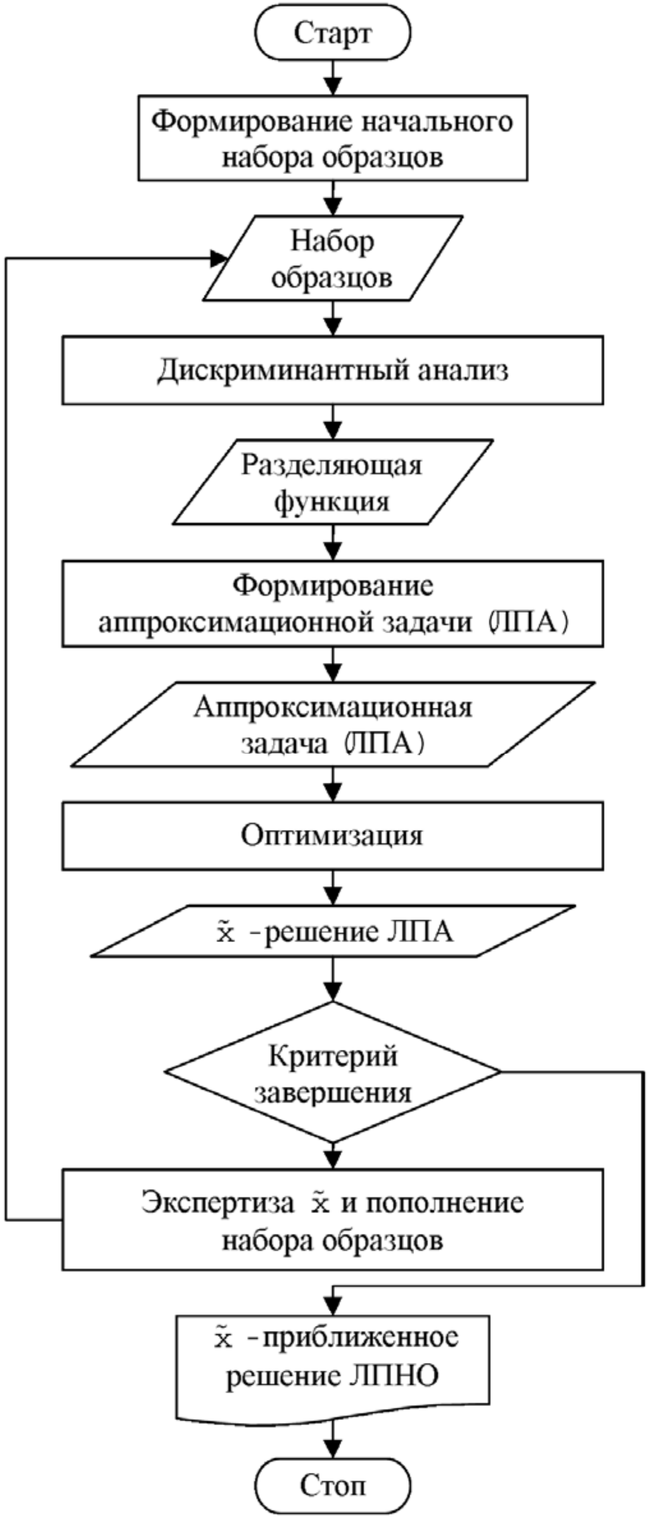


Функция эксперта

$$\mathfrak{e}(x) = \operatorname{sgn}(\overline{\varphi}(x))$$

$$\begin{cases} \mathfrak{e}(x) = 1 & \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) > 0 \\ \mathfrak{e}(x) = 0 & \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) = 0 \\ \mathfrak{e}(x) = -1 & \Leftrightarrow \quad \overline{\varphi}(x) < 0 \end{cases}$$

Алгоритм ЛП-ДА (Линейное Программирование – Дискриминантный Анализ)



Начальный набор образцов

$$\mathfrak{P} = \{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}: \quad \begin{cases} \mathfrak{e}(x) = 1, & \forall x \in \mathbb{A} \\ \mathfrak{e}(x) = -1, & \forall x \in \mathbb{B} \end{cases}$$

Разделяющая функция

$$\tilde{\varphi}(x): \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}(x) > 0, & \forall x \in \mathbb{A} \\ \tilde{\varphi}(x) < 0, & \forall x \in \mathbb{B} \end{cases}$$

Аппроксимационная задача:

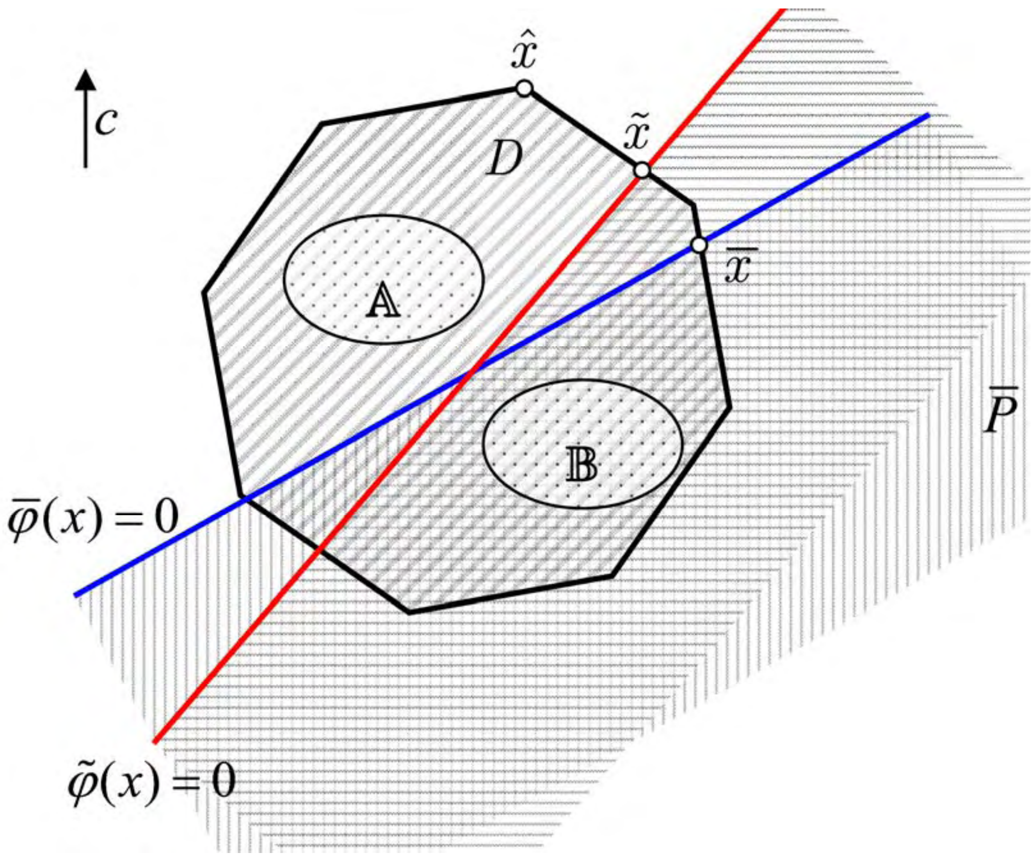
$$\tilde{x} \in \operatorname{Arg}\max\left\{(c, x) \mid Ax \le b, \tilde{\varphi}(x) \le 0\right\}$$

Коллизии:

1. $\mathfrak{e}(\tilde{x}) = 0$
2. $\mathfrak{e}(\tilde{x}) = 1$ и $\tilde{x} \in \mathbb{A}$
3. $\mathfrak{e}(\tilde{x}) = -1$ и $\tilde{x} \in \mathbb{B}$

В этом случае к $\tilde{x}$ применяется процедура рандомизации.

Обозначения



$$D = \{x \mid Ax \le b\}$$

$$\overline{x} = \arg\max\{(c,x) \mid x \in D;\ \ \overline{\varphi}(x) \le 0\}$$

$$\tilde{x} = \arg\max\{(c,x) \mid x \in D;\ \ \tilde{\varphi}(x) \le 0\}$$

$$\hat{x} = \arg\max\{(c,x) \mid x \in D\}$$

$$\overline{P} = \{x \mid \overline{\varphi}(x) \le 0\}$$

$$\overline{H} = \{x \mid \overline{\varphi}(x) = 0\}$$

$$\hat{x} \ne \overline{x}$$

$\overline{\varphi}(x)$ - аффинная функция

D содержит внутренние точки и ограничен

$D \cap \overline{P}$ содержит внутренние точки

Устойчивость задачи ЛПНО

Теорема 1. Задача ЛПНО

$$\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}(x) \le 0\}$$

является устойчивой по $\overline{\varphi}$.

Формализация алгоритма

Алгоритм $\mathfrak{L}$. Пусть заданы конечные множества $\mathbb{A}^0$ и $\mathbb{B}^0$, такие, что $\mathbb{A}^0 \subset D \setminus \bar{P}$, $\mathbb{B}^0 \subset D \cap (\bar{P} \setminus \bar{H})$. Множества $\mathbb{A}^0$ и $\mathbb{B}^0$ задают начальный набор образцов $\mathfrak{P}^0$. Будем предполагать, что $\mathbb{A}^0 \neq \varnothing$ и $\mathbb{B}^0 \neq \varnothing$. Алгоритм $\mathfrak{L}$ состоит из следующих шагов:

Шаг 0. $k := 0$.

Шаг 1 (дискриминантный анализ). Найдем аффинную функцию $\tilde{\varphi}^k(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\forall x \in \mathbb{A}^k : \tilde{\varphi}^k(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{B}^k : \tilde{\varphi}^k(x) < 0.$$

и *условию нормализации*: вектор нормали к гиперплоскости $\tilde{H}^k = \{x \mid \tilde{\varphi}^k(x) = 0\}$ должен быть коллинеарен вектору нормали к гиперплоскости $\bar{H}$.

Формализация алгоритма

Ш а г 2 (п о р о ж д е н и е о б р а з ц о в). Получим новый образец как решение следующей задачи ЛПА^k:

$$\tilde{x}^k = \arg\max\{(c,x) \mid x \in D,\ \tilde{\varphi}^k(x) \le 0\}.$$

Ш а г 3 (э к с п е р т и з а и п о п о л н е н и е $\mathfrak{P}$).

Если

$$(c,\tilde{x}^k) \notin \{(c,x) \mid x \in \mathbb{A}^k \cup \mathbb{B}^k \cup \bar{H}\}, \qquad (*)$$

то положим

$$\mathbb{A}^{k+1} = \begin{cases} \mathbb{A}^k, & \mathbf{e}(\tilde{x}^k) = -1 \\ \mathbb{A}^k \cup \{\tilde{x}^k\}, & \mathbf{e}(\tilde{x}^k) = \ \ 1 \end{cases}$$

$$\mathbb{B}^{k+1} = \begin{cases} \mathbb{B}^k \cup \{\tilde{x}^k\}, & \mathbf{e}(\tilde{x}^k) = -1 \\ \mathbb{B}^k, & \mathbf{e}(\tilde{x}^k) = \ \ 1 \end{cases}$$

Формализация алгоритма

Шаг 4 (рандомизация). Если условие (*) не выполняется, то выполним *процедуру рандомизации*. Пусть

$$\mathfrak{R}^{\rho}(C) = \{x + r_i^{\rho}(x) \mid \forall x \in C;\ i = 1,\dots,m\},$$

где $r_i^{\rho}(x)$ – случайный вектор в ρ-окрестности точки x. Будем называть ρ *радиусом рандомизации*, m – *мощностью рандомизации* ($m \geq 1$). Выберем ρ_k такое, что

$$0 < \rho_k < \min(\operatorname{dist}(\mathbb{A}^k, \bar{H}), \operatorname{dist}(\mathbb{B}^k, \bar{H}))$$

(здесь $\operatorname{dist}(X,Y) = \inf\{\|x - y\| :\ x \in X,\ y \in Y\}$).

Положим:

$$\mathbb{A}^{k+1} = \mathbb{A}^k \cup \mathfrak{R}^{\rho_k}(\mathbb{A}^k),\ \mathbb{B}^{k+1} = \mathbb{B}^k \cup \mathfrak{R}^{\rho_k}(\mathbb{B}^k).$$

Шаг 5. $k := k + 1$.

Шаг 6. Перейти на шаг 1.

Теорема сходимости для ЛПНО

Теорема 2. Пусть $D = \{x \mid Ax \leq b\}$ – телесное ограниченное множество. Пусть задача ЛПНО имеет единственное решение $\overline{x} \neq \hat{x}$, где $\hat{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \leq b\}$. Тогда для последовательности $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^k$, порождаемой алгоритмом ЛП-ДА, имеем:

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \overline{x}.$$

Задача линейного программирования с несколькими неформализованными ограничениями (ЛПНО*)

$$\text{ЛПНО*}: \qquad \bar{x} = \arg\max\left\{(c, x) \mid Ax \le b,\ \bar{\varphi}_1(x) \le 0,\ \ldots\ ,\ \bar{\varphi}_q(x) \le 0\right\}$$

$\bar{\varphi}_1(x) \le 0,\ \ldots\ ,\ \bar{\varphi}_q(x) \le 0$ - неформализованные ограничения

Устойчивость задачи ЛПНО*

Теорема 4. Задача ЛПНО* является устойчивой по $\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_q$.

Решение задачи ЛПНО*

$$\text{ЛПНО}_1: \quad \overline{x}_1 = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}_1(x) \le 0\};$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$\text{ЛПНО}_q: \quad \overline{x}_q = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}_q(x) \le 0\}$$

$\tilde{\varphi}_i^1(x), \ldots, \tilde{\varphi}_i^k(x)$ – последовательность разделяющих функций для задач ЛПНО$_i$ $(i = 1, \ldots, q)$.

$$\text{ЛП}^k: \tilde{x}^k \in \operatorname{Arg}\max\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \tilde{\varphi}_1^k(x) \le 0,\ \dots,\ \tilde{\varphi}_q^k(x) \le 0\}$$

Теорема сходимости для ЛПНО*

Теорема 5. *Пусть задача ЛПНО* имеет единственное решение $\overline{x}$. Пусть каждая задача ЛПНО$_i$ $(1 \le i \le q)$ также имеет единственное решение $\overline{x}_i$, причем $\overline{x}_i \ne \hat{x}$, где $\hat{x} = \arg\max\{(c,x) \mid Ax \le b\}$. Пусть $\tilde{x}^k$ – решение задачи ЛП^k. Тогда*

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \to \overline{x},$$

то есть при достаточно большом k в качестве приближенного решения задачи ЛПНО* можно взять решение задачи ЛП^k.

Критерий завершения итерационного процесса

$$\sum_{i=1}^{l} \left\| \tilde{x}^k - \tilde{x}^{k-i} \right\| < \varepsilon$$

$\varepsilon>0$ - фиксированное вещественное число, определяющее точность вычислений

$\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^k$ - последовательность решений аппроксимационных задач, полученных при работе алгоритма ЛП-ДА.

Критерий завершения итерационного процесса

Теорема 6. Пусть $\overline{x}$ – решение задачи ЛПНО, $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность решений аппроксимационных задач, порождаемых алгоритмом ЛП-ДА, *l* - фиксированное целое положительное число. Тогда

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\overline{x}-\tilde{x}^k\right\|=0 \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{l}\left\|\tilde{x}^k-\tilde{x}^{k-i}\right\|=0.$$

Рандомизация

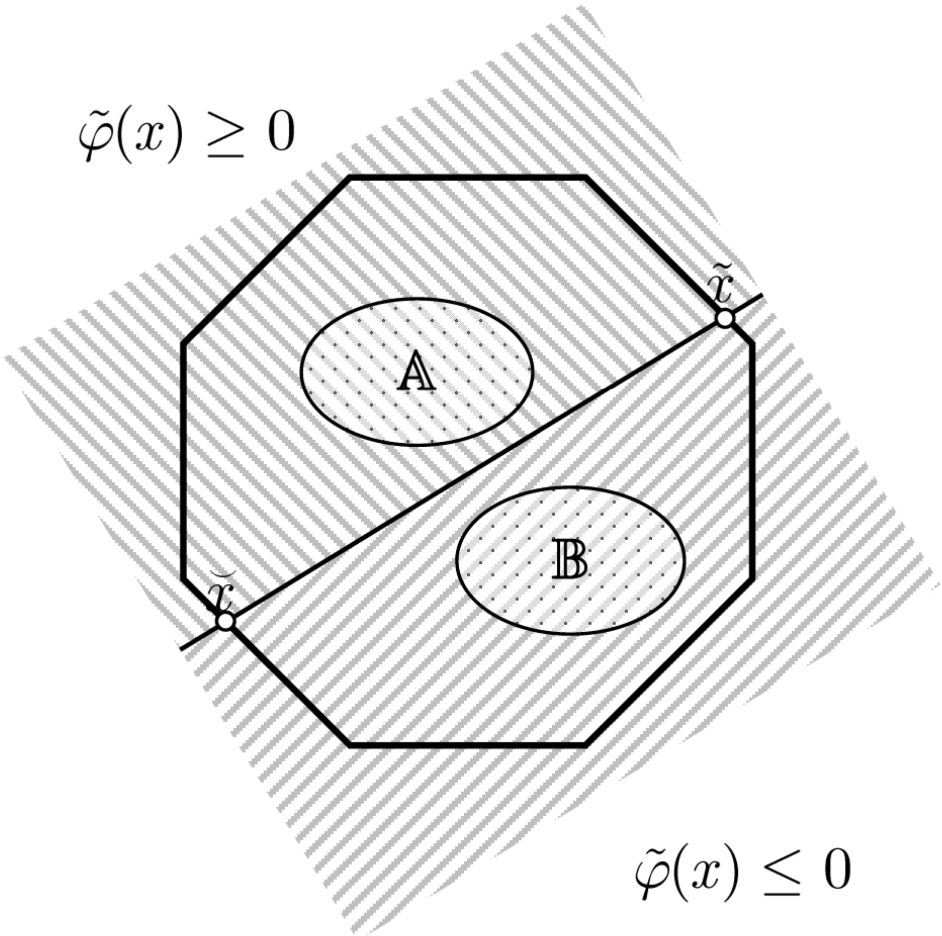
Процедура рандомизации точки x заключается в порождении m случайных точек внутри сферы радиуса ρ с центром в x.

ρ – радиус рандомизации

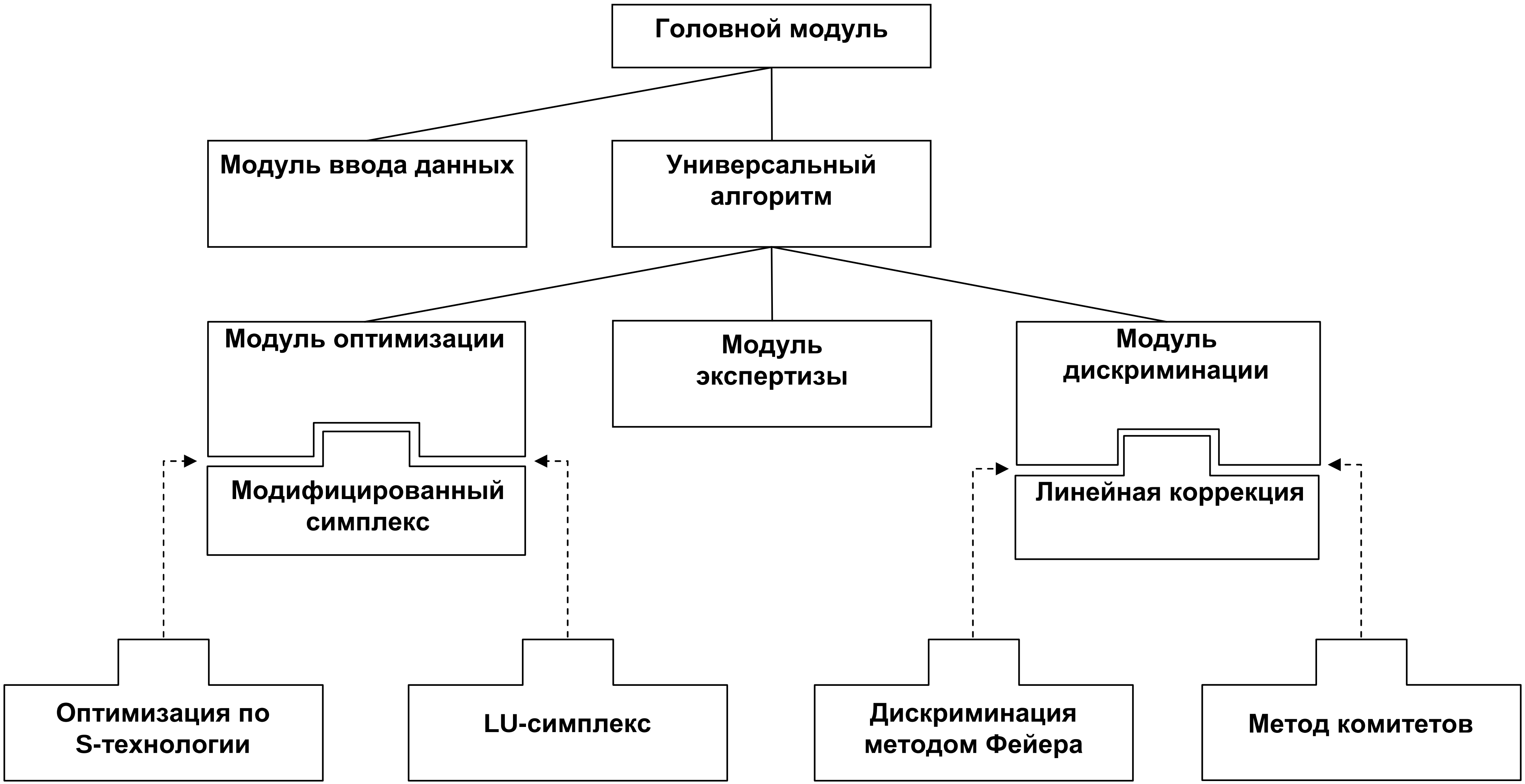
m – мощность рандомизации

Метод осцилляций

Дополнительная задача: $\breve{x} = \arg\min\{(c,x) \mid Ax \le b, \tilde{\varphi}(x) \ge 0\}$



Модульная структура комплекса



Реализация

- Выполнена реализация программного комплекса ЛП-ДА на языке Си. Общий объем кода составил около 3000 строк
  – Блок оптимизации: симплекс-метод
  – Блок дискриминантного анализа: метод линейной коррекции
- Исходные тексты программ: http://life.susu.ru/lpno/
- Реализована параллельная версия с использованием пакета MPI-2: http://life.susu.ru/lpnoMPI/

Вычислительные эксперименты

- Класс модельных задач *Mod-n*
- Задача управления металлургическим предприятием *Metal*

Класс задач *Mod-n*

$$
\begin{cases}
x_1 - 2x_2 \le 0 \\
x_1 - 2x_3 \le 0 \\
\qquad \vdots \\
x_1 - 2x_n \le 0 \\
x_1 + 2x_2 \le 2000 \\
x_1 + 2x_3 \le 2000 \\
\qquad \vdots \\
x_1 + 2x_n \le 2000 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0
\end{cases}
$$

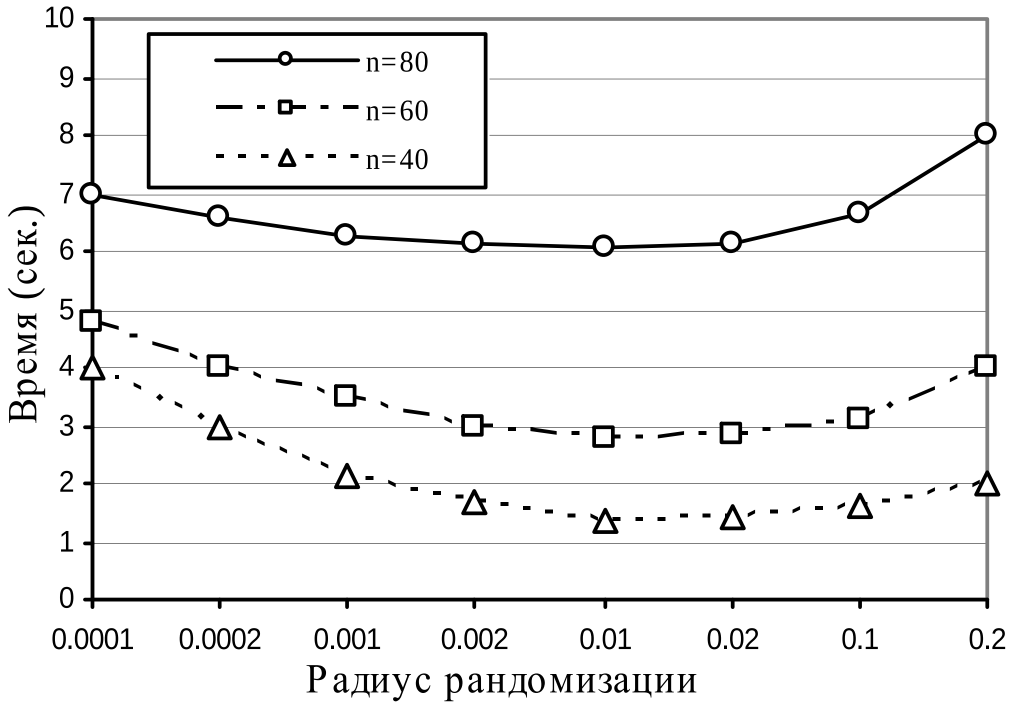
$$Q_{\max} = x_1$$

$$\varphi(x) = \operatorname{sgn}(2(n-1)x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_n - 800(n-1))$$

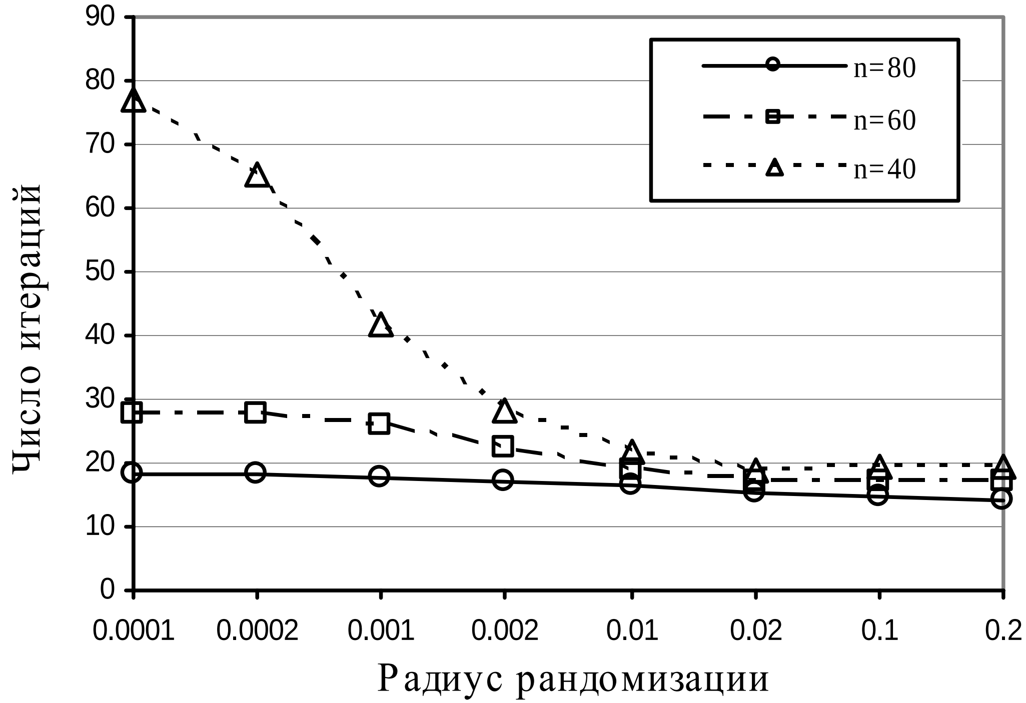
n – размерность задачи

Влияние радиуса рандомизации на эффективность алгоритма ЛП-ДА

Зависимость времени решения задачи от радиуса рандомизации

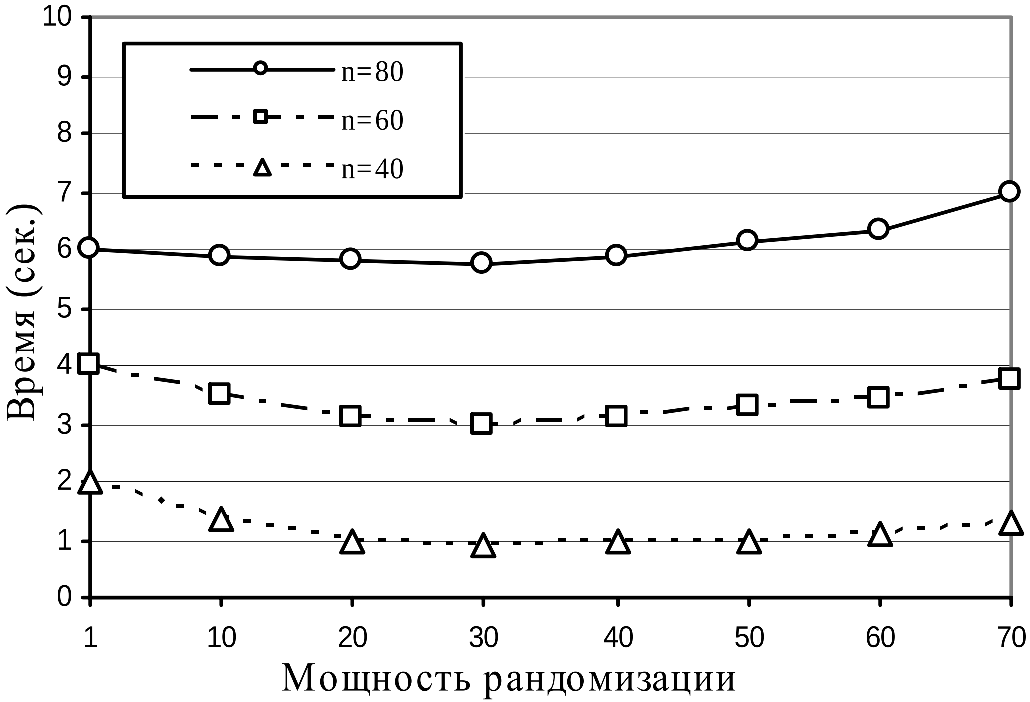


Зависимость числа итераций от радиуса рандомизации

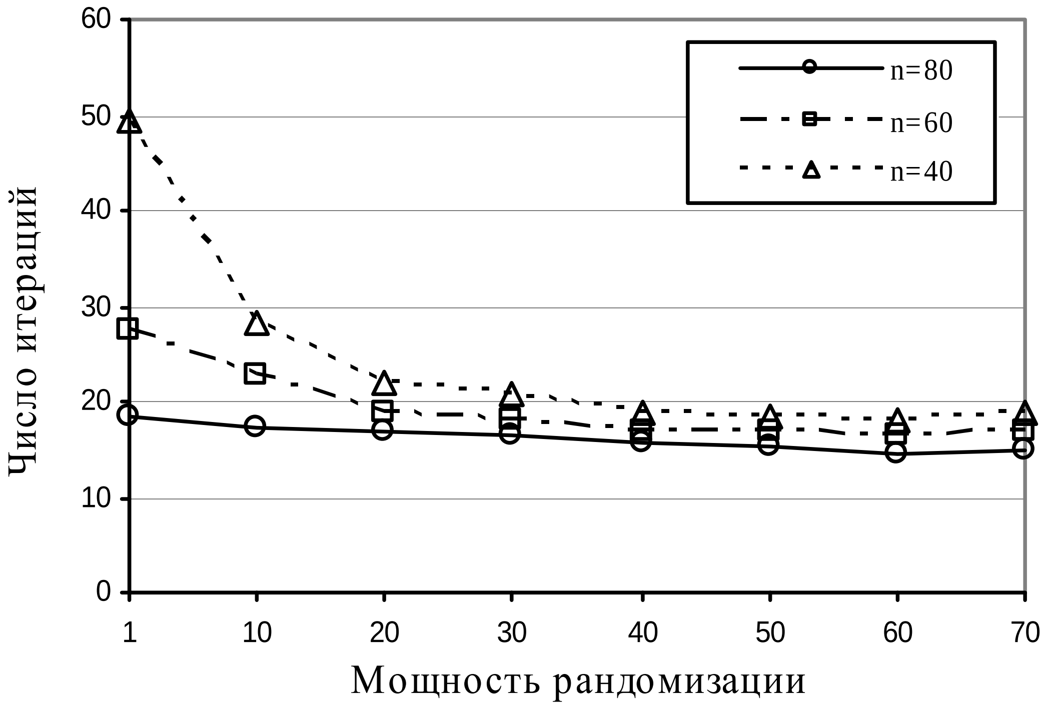


Влияние мощности рандомизации на эффективность алгоритма ЛП-ДА

Зависимость времени решения задачи от мощности рандомизации

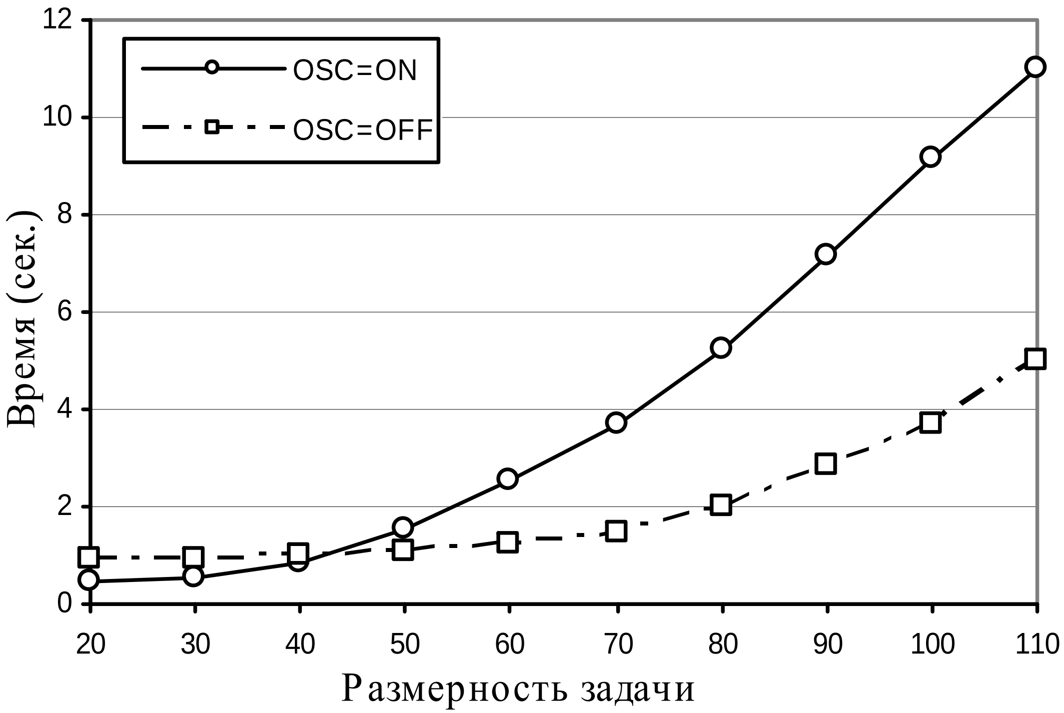


Зависимость числа итераций от мощности рандомизации

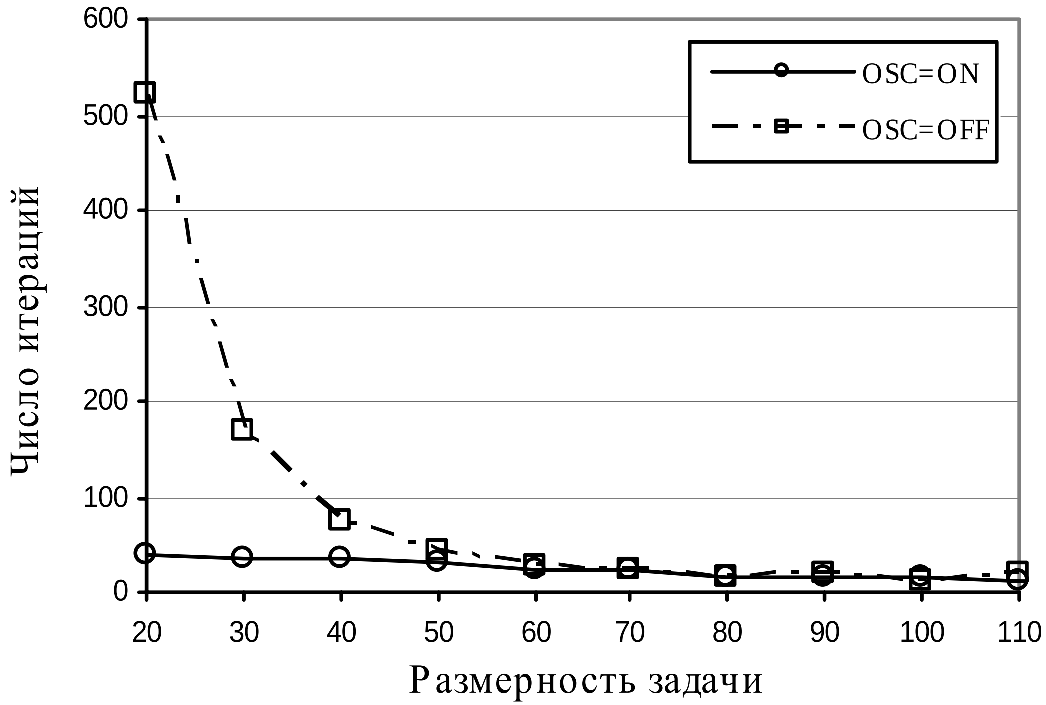


Эффективность метода осцилляций

Зависимость времени решения задачи от размерности *n*



Зависимость числа итераций от размерности *n*



Задача *Metal*

Фролов В.Н. Оптимизация плановых программ при слабо согласованных ограничениях. –М.: Наука, 1986.

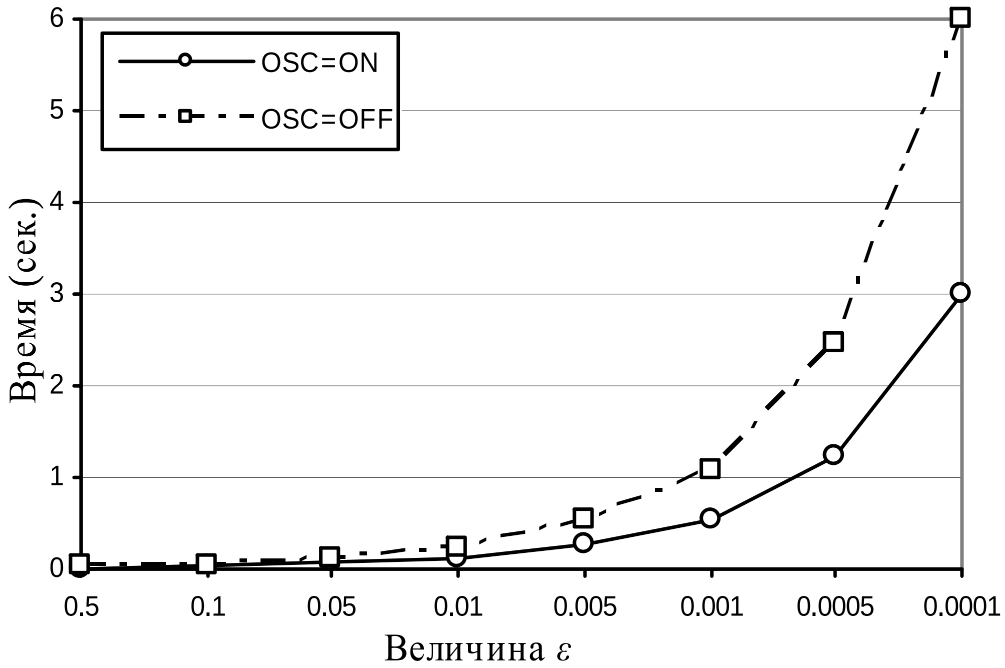
$$\begin{cases} 6.4x_1 + 4x_2 + 7.5x_3 + 7x_4 + 4.4x_5 \le 7000 \\ 35x_3 + 20x_4 \le 7000 \\ x_1 \le 50 \\ x_2 \le 1150 \\ x_3 \le 150 \\ x_4 \le 5 \\ x_5 = 125 \end{cases}$$

$$Q_{\max} = 18x_1 + 16.8x_2 + 26.3x_3 + 36.2x_4 + 17.5x_5$$

$$\mathfrak{e}(x) = \mathrm{sgn}(85x_1 + 75x_4 - 4750)$$

Влияние точности вычисления

Зависимость времени решения задачи от точности вычисления ε



Зависимость числа итераций от точности вычисления ε

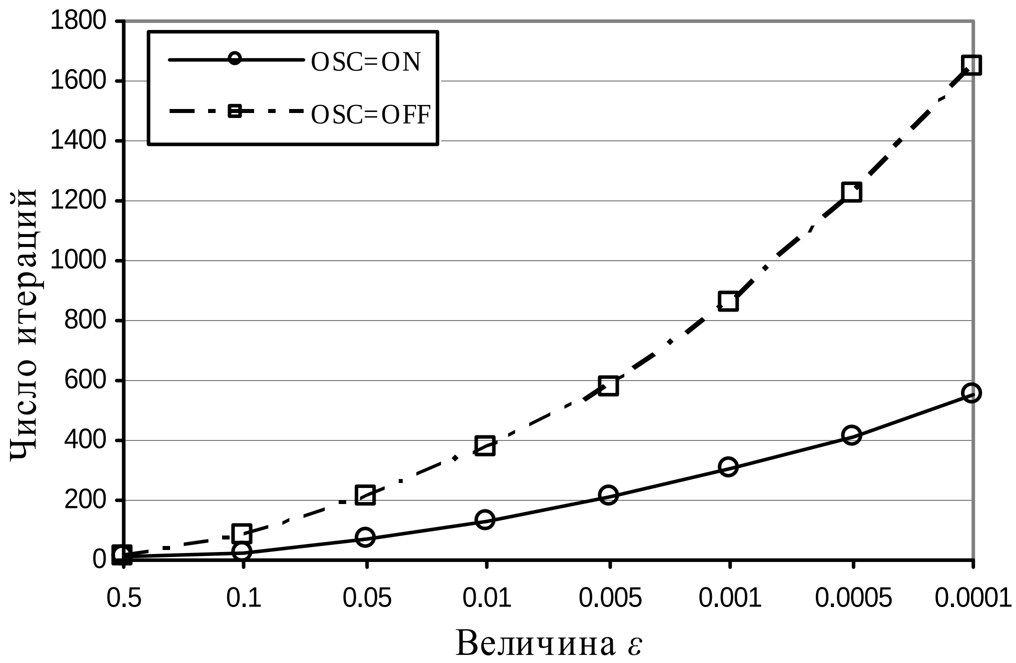
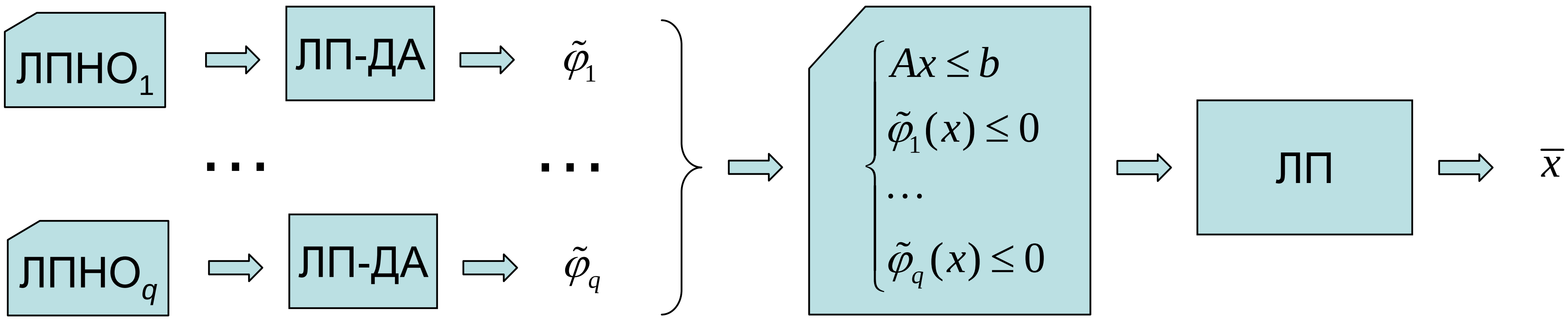


Схема параллельного алгоритма

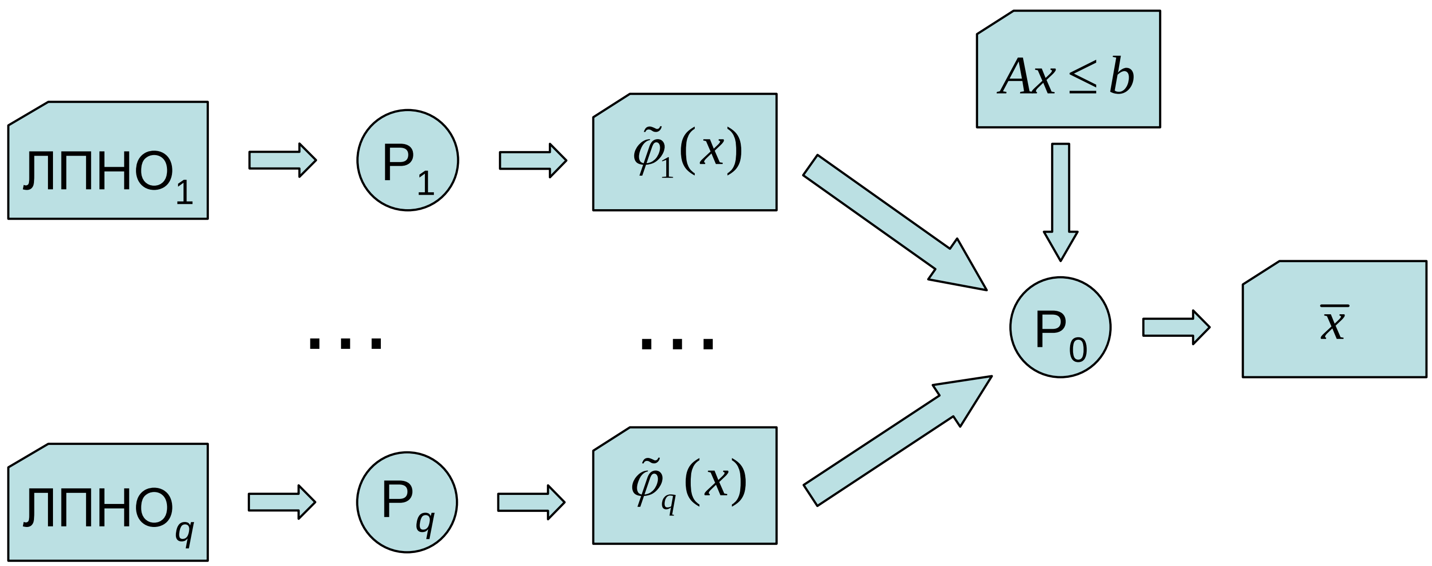
$$\text{ЛПНО}_1 : \max\left\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}_1(x) \le 0\right\}$$

$$\ldots$$

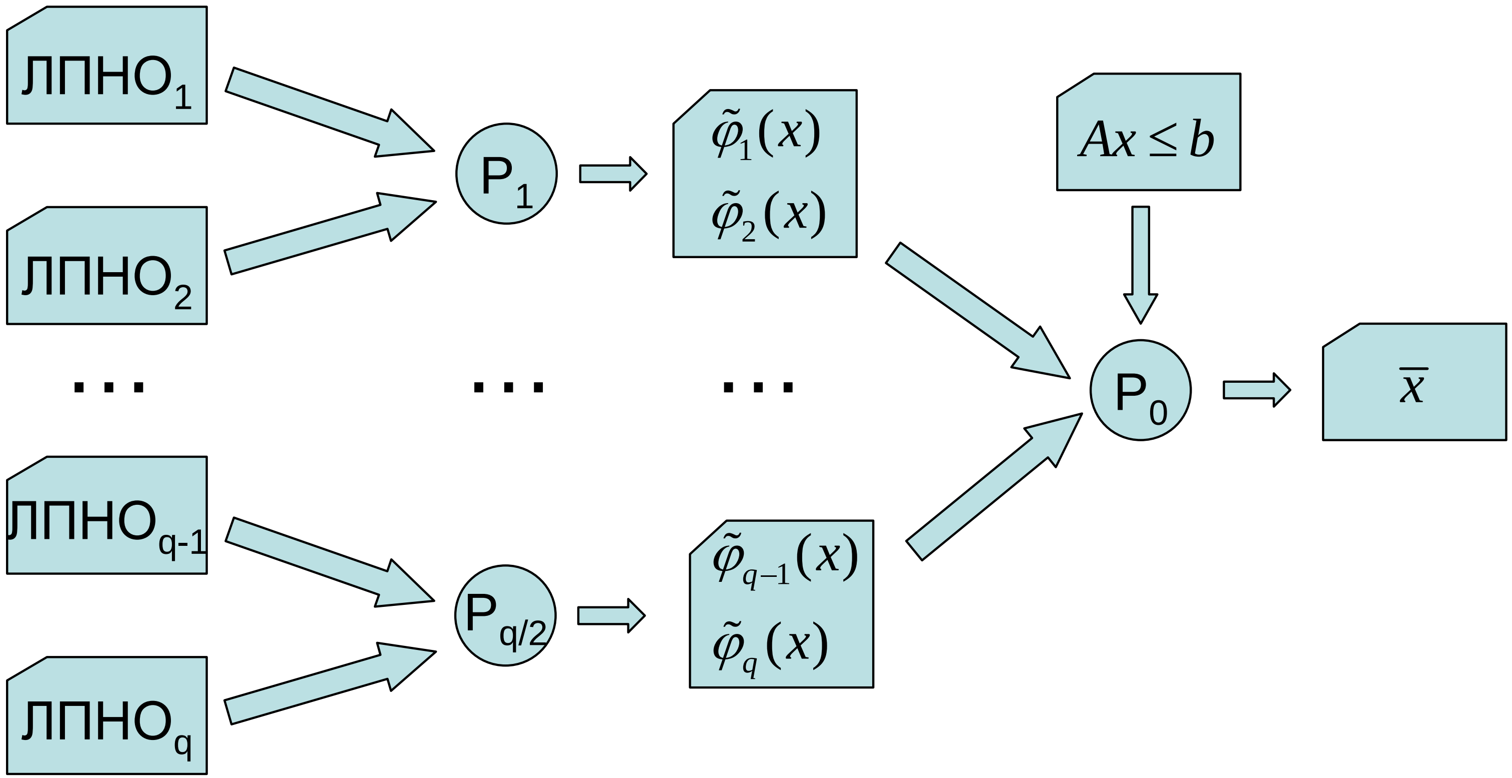
$$\text{ЛПНО}_q : \max\left\{(c,x) \mid Ax \le b,\ \overline{\varphi}_q(x) \le 0\right\}$$



Одна задача ЛПНО$_i$ на процессор



Две задачи ЛПНО$_i$ на процессор



Класс задач *Mod-n**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0 \\ x_1 - 2x_3 \le 0 \\ \vdots \\ x_1 - 2x_n \le 0 \\ x_1 + 2x_2 \le 8000 \\ x_1 + 2x_3 \le 8000 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_n \le 8000 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

$$Q_{\max} = x_1$$

$$\begin{cases} \mathfrak{e}_1(x) = \operatorname{sgn}(3x_1 - x_2 - 3000) \\ \vdots \\ \mathfrak{e}_q(x) = \operatorname{sgn}(3x_1 - x_q - 3000) \end{cases}$$

$$q \leqslant n - 1$$

n – размерность задачи
q – количество неформализованных ограничений

Ускорение

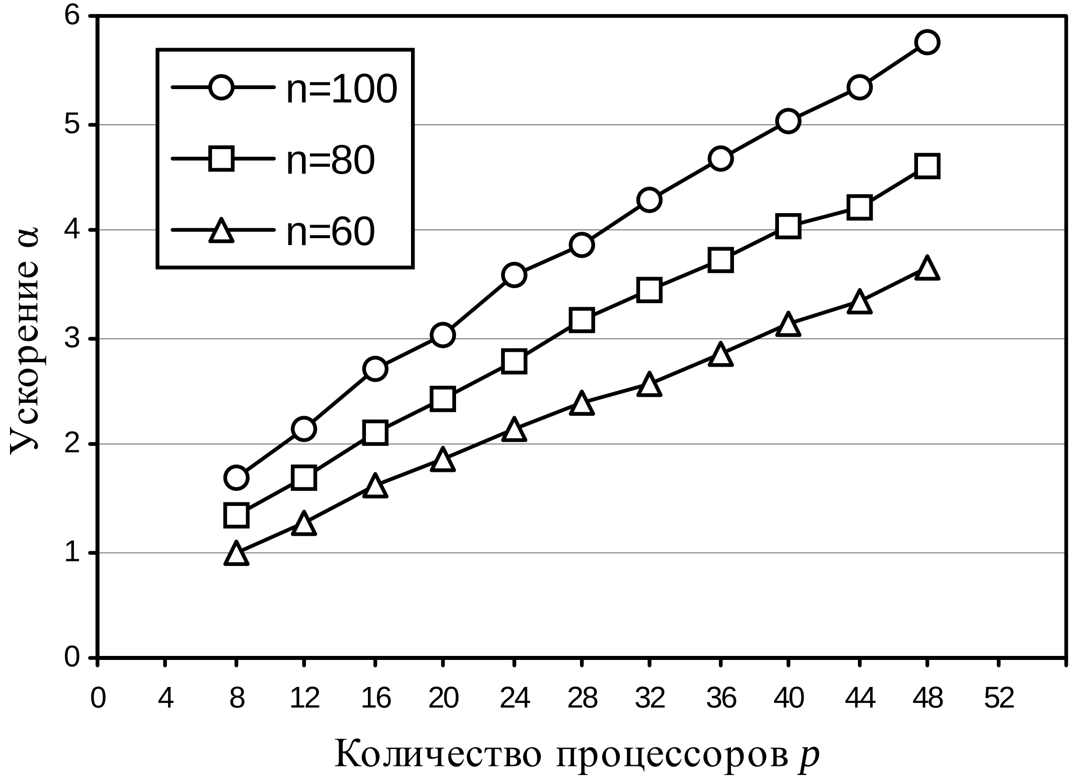
$\alpha = \alpha_0 + t_p / t_8$

t_8 – время, затраченное на решение модельной задачи размерности n с 48 неформализованными ограничениями на 8 процессорах

t_p – время, затраченное на решение этой же задачи на p процессорах

$\alpha_0 = (n - 60)/60$

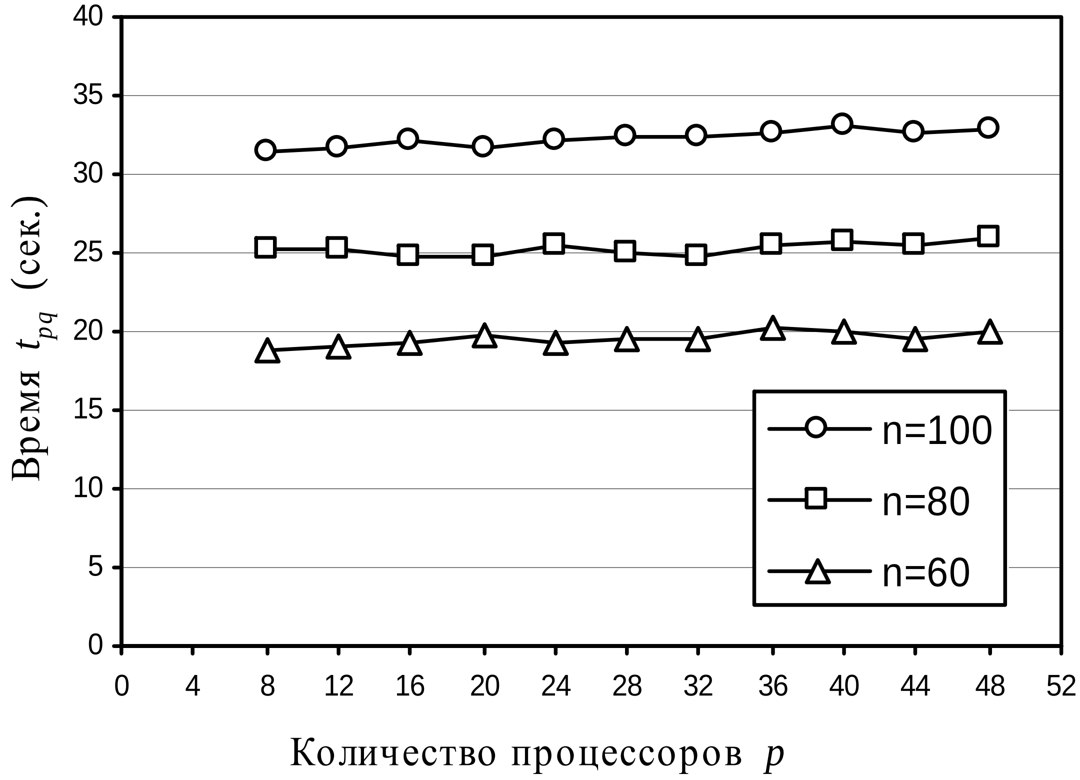
$q = 48$



Расширяемость

t_{pq} – время, затраченное на решение модельной задачи размерности *n* с *q* неформализованными ограничениями на *p* процессорах

$p = q$



Основные результаты, выносимые на защиту

1) Предложен и исследован итерационный метод для решения задач линейного программирования с неформализованными ограничениями, базирующийся на синтезе дискриминантного анализа и линейной оптимизации.
2) Предложен метод осцилляций, позволяющий существенно ускорить сходимость последовательности приближений к точному решению.
3) Разработан и исследован алгоритм ЛП-ДА, соединяющий методы линейного программирования и дискриминантного анализа.
4) Спроектирован и реализован прототип программного комплекса для решения задач линейного программирования с неформализованными ограничениями. Общий объем кода на языке Си составил около 3000 строк. Исходные тексты прототипа свободно доступны в Интернет по адресу: http://life.susu.ru/lpno/.
5) Спроектирована и реализована параллельная версия алгоритма ЛП-ДА с использованием пакета MPI-2. Исходные тексты парал-лельной версии свободно доступны в Интернет по адресу: http://life.susu.ru/lpnoMPI/.
6) Проведены вычислительные эксперименты на модельных и реальных задачах экономико-математического моделирования, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов, методов и подходов.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!