ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ СЕТОЧНЫЙ МЕТОД ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА БАЗЕ ФЕЙЕРОВСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ*

И.М. Соколинская, Л.Б. Соколинский

В практике экономико-математического моделирования встречаются задачи линейного программирования (ЛП) большой размерности, содержащие десятки тысяч переменных и ограничений. Решение таких задач за приемлемое время возможно только на многопроцессорных системах с массовым параллелизмом. Применение симплекс-метода на таких системах ограничивается его плохой масштабируемостью. При решении задачи общего вида симплекс-методом эффективное распараллеливание ограничивается 30 процессорными узлами. В работе [1] был предложен подход для построения параллельного метода решения задачи ЛП с использованием фейеровских отображений и S-технологии [2]. Идея метода заключалась в разбиении вектора, задающего точку в n-мерном пространстве, на подвекторы. Фейеровское отображение применялось независимо t раз к каждому подвектору, после чего результаты объединялись в общий вектор, к которому снова применялось фейеровское отображение. Вычислительные эксперименты показали, что существуют задачи ЛП, для которых указанный алгоритм сходится к искомому решению только при $t = 1$, и, следовательно, он не допускает эффективного распараллеливания на большом количестве процессорных узлов.

В докладе предлагается новый параллельный алгоритм решения задачи ЛП на основе фейеровских отображений, допускающий эффективное распараллеливание на сотнях процессорных узлов.

Пусть задана задача линейного программирования в пространстве $\mathbb{R}^n$: $\max\{(c,x) \mid Ax \le b\}$, где A – матрица размера $m \times n$. Обозначим

$$M = \{x \mid Ax \le b : l_i(x) = (a_i, x) - b_i \le 0,\ i = 1,\ldots,m\}.$$

Отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *M-фейеровским*, если $\forall y \in M\,(\varphi(y) = y)$ и $\forall y \in M\left(\forall x \notin M\left(\|\varphi(x) - y\| < \|x - y\|\right)\right)$. Определим отображение $\varphi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\varphi_M(x) = x - (\lambda/\delta)\sum_{i=1}^{m} l_i^+(x) a_i, \text{ где } 0 < \lambda < 2,\ \delta = \sum_{i=1}^{m}\|a_i\|^2,\ l_i^+(x) = \max\{(a_i, x) - b_i, 0\}.$$

Тогда отображение φ_M будет M-фейеровским.

Пусть $K = \{x \mid x_j \ge z_j, x_j \le z_j + d, j = 1,\ldots,n\}$ – n-мерный куб с длиной грани $d > 0$ такой, что $M \subset K$. Зададим $p \in \mathbb{N}$ – количество процессоров в многопроцессорной системе. Предположим, что $p = u^n$ для некоторого $u \in \mathbb{N}$. Положим $d' = d/u$. Определим $K_{k_1,\ldots,k_n} = \{x \mid x_j \ge z_j + k_j d', x_j \le z_j + k_j d' + d', j = 1,\ldots.n\}$, где $k_j \in \mathbb{Z}$ и $0 \le k_j < u$. Таким образом мы задали разбиение куба K на кубики $K_{k_1,\ldots,k_n}$ ($k_j = 0,\ldots,u-1$, $j = 1,\ldots,n$) по числу процессоров p. Заменим n-мерную нумерацию кубиков на одномерную: K_t ($t = 1,\ldots,p$). Обозначим сокращенно $\varphi_t = \varphi_{K_t \cap M}$. Для произвольной начальной точки $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ построим последовательность $\{\varphi_t^s(\tilde{x}) \mid s = 1,2,\ldots\}$. Здесь $\varphi_t^1(\tilde{x}) = \varphi_t(\tilde{x})$, $\varphi_t^s(\tilde{x}) = \varphi_t(\varphi_t^{s-1}(\tilde{x}))$.

Теорема 1. Для любого $t \in \{1,\ldots,p\}$ последовательность $\{\varphi_t^s(\tilde{x}) \mid s = 0,1,\ldots\}$ всегда сходится к некоторой точке $x^t \in \mathbb{R}^n$. При этом $x^t \in M$ тогда и только тогда, когда $K_t \cap M \ne \varnothing$.

---

* Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00546-а.

Определим функцию $\xi : \mathbb{R}^n \to \{0,1\}$ следующим образом: $\xi(x) = 1$, если $x \in M$, и $\xi(x) = 0$ в противном случае. В качестве приближенного решения исходной задачи линейного программирования можно взять $\bar{x} \in \mathrm{Arg\ max}\left\{ \xi\left(x^t\right) \cdot \left(c, x^t\right) \middle| t = 1, \ldots, p \right\}$. Указанное приближенное решение может быть далее уточнено путем разбиения кубиков на кубики еще меньшего размера. Описанный подход реализован в виде программы на языке C++ с использованием пакета MPI. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили высокую эффективность распараллеливания на большом количестве процессоров.

Литература

[1] *Соколинский Л.Б.* Иерархический параллелизм: новая парадигма программирования // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. № 11. Екатеринбург: УрО РАН. -2007. С. 76-77.

[2] Еремин И.И. Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. 199 с.