

ДИСКРИМИНАНТНЫЙ АНАЛИЗ И РАНДОМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕФОРМАЛИЗОВАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ*

В.Д. Мазуров[†], И.М. Соколинская[‡]

[†] Уральский государственный университет
620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51
Тел.: (7-343) 355-75-89
Факс: (7-343) 350-59-64
vladimir.mazurov@usu.ru

[‡] Челябинский государственный университет
454021, Челябинск, ул. Бр. Кашириных, 129
Тел.: (7-3512) 42-03-12
Факс: (7-3512) 42-09-25
isok@csu.ru

Работа посвящена проблеме решения задачи линейной оптимизации с неформализованным ограничением (ЛПНО). Предлагается итерационный подход, при котором приближенное решение задачи ЛПНО получается путем последовательного выполнения дискриминантного анализа для имеющегося множества прецедентов и проведения экспертиз для вновь получаемых образцов. Описывается алгоритм порождения образцов путем нахождения решения аппроксимационной задачи линейного программирования (ЛПА), которая получается добавлением к формализованной части задачи ЛПНО неравенства, определяемого разделяющей функцией. Для предложенного алгоритма доказывается сходимость последовательности приближенных решений к точному решению задачи ЛПНО.

1. Введение

Современные требования к качеству математических моделей при моделировании технических, экономических и других ситуа-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00565).

ций предполагают описание всех значащих факторов, не исключая ограничений, которые не поддаются полной формализации и по этой причине иногда относятся к «внемодельным» факторам. Примерами неформализованных ограничений могут служить социально-политические, экологические, демографические факторы, влияние природной и технологической среды и др. Учет этих требований, например, в системе экономического управления может быть осуществлен путем сочетания оптимизационных моделей с процедурами экспертного оценивания. В основе последних лежит накопленный опыт, описываемый большими массивами плохо структурированной информации. Это составляет естественную основу для применения методов распознавания образов, позволяющих вносить упорядочение в такие массивы в соответствии с теми или иными факторами.

Задача распознавания образов заключается в нахождении целесообразного разбиения заданной совокупности объектов на классы эквивалентности. При этом различают задачу дискриминантного анализа (построение поверхностей, разделяющих конечные множества) и задачу таксономии (разбиение конечного множества на подмножества близких друг к другу элементов). Задача дискриминантного анализа сводится к решению относительно $\varphi \in F \subset \{R^n \rightarrow R^1\}$ системы

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, & x \in M \\ \varphi(x) < 0, & x \in N, \end{cases}$$

где M и N – конечные непересекающиеся множества из пространства R^n ; F – заданный класс функций n -мерного вектора. Функция $\varphi(x)$ в этом случае называется *разделяющей функцией* для множеств M и N .

В данной статье рассматривается применение методов дискриминантного анализа к решению задач линейной оптимизации

при наличии одного неформализованного ограничения. Предлагаемый подход состоит в том, что первоначально неточная модель уточняется в ходе получения новой информации (так называемых *образцов*) с помощью распознавания образов и проведения экспертиз. Статья организована следующим образом. В разделе 2 строится общая математическая модель задачи и процесса нахождения ее приближенного решения. В разделе 3 доказывается теорема об устойчивости задачи линейного программирования по неформализованному ограничению. Эта теорема играет важную роль при решении проблемы сходимости. В разделе 4 описывается алгоритм получения новых образцов, служащих основой итерационного процесса. Раздел 5 посвящен доказательству сходимости полученной последовательности приближенных решений к точному решению исходной задачи. В разделе 6 рассматриваются вопросы применимости предложенного алгоритма для решения практических задач. В заключении суммируются основные результаты, полученные в настоящей работе и предлагаются направления дальнейших исследований.

2. Математическая модель

Пусть модель экономической ситуации представлена в виде следующей задачи линейного программирования [1]:

$$\bar{x} = \arg \max \{ (c, x) \mid (a_i, x) \leq b_i; i = 1, \dots, m; (d, x) \leq h \}.$$

При этом мы предполагаем, что a_i и b_i заданы, а d и h неизвестны. Такую задачу будем называть *задачей линейного программирования с неформализованным ограничением* (ЛПНО).

Неформализованное ограничение $(d, x) \leq h$ представлено в рамках нашей модели двумя информационными ресурсами: *функцией экспертизы* $\epsilon(x)$ и *набором образцов* \mathfrak{B} . Рассмотрим каждый из этих информационных объектов.

Функция экспертизы $\epsilon(x)$ в рассматриваемой модели задается формулой

$$\epsilon(x) = \text{sgn}((d, x) - h).$$

Другими словами, для любого $\tilde{x} \in R^n$ с помощью функции экспертизы мы можем определить, удовлетворяет \tilde{x} неформализованному ограничению или нет, используя следующую систему правил:

$$\begin{cases} \epsilon(\tilde{x}) \leq 0 & \Rightarrow (d, \tilde{x}) \leq h \\ \epsilon(\tilde{x}) > 0 & \Rightarrow (d, \tilde{x}) > h \end{cases}$$

Функция экспертизы является формализацией понятия эксперта. Под *экспертом* мы здесь понимаем некоторый информационный ресурс, использование которого позволяет получать реально эффективные (оптимальные или близкие к оптимальным) варианты в задачах оптимизации с неформализованными или не полностью определенными факторами. Отметим, что с практической точки зрения количество обращений к функции $\epsilon(x)$ может быть ограниченным. Такое ограничение на указанный ресурс может мотивироваться тем, что эксперт в каждом случае дает согласие на некоторое определенное количество актов экспертизы, либо тем, что экспертиза требует значительного времени.

Набор образцов $\mathfrak{B} = \{A, B\}$ определяется путем задания пары конечных непересекающихся множеств A и B из пространства R^n , удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} (d, x) - h > 0, x \in A \\ (d, x) - h < 0, x \in B \end{cases}$$

Набор образцов \mathfrak{B} представляет собой *знания* о неформализованном ограничении, накопленные в результате предшествующего опыта. Постепенно пополняя \mathfrak{B} путем использования $\epsilon(x)$, мы тем самым уточняем нашу модель экономической ситуации.

Применяя методы дискриминантного анализа, мы можем найти для множеств A и B разделяющую функцию $\tilde{\varphi} \in \Phi$ (Φ – класс всех аффинных функций), удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) > 0, & x \in A \\ \tilde{\varphi}(x) < 0, & x \in B \end{cases}$$

В качестве приближенного решения задачи ЛПНО мы можем теперь взять решение (если оно существует) следующей задачи линейного программирования, называемой *аппроксимационной* (ЛПА):

$$\tilde{x} = \arg \max \{ (c, x) \mid (a_i, x) \leq b_i; i = 1, \dots, m; \tilde{\varphi}(x) \leq 0 \}.$$

При этом следует отметить, что приближенное решение \tilde{x} будет с приемлемой точностью аппроксимировать точное решение \bar{x} , если набор образцов \mathfrak{B} будет достаточно представительным.

Для практического использования описанного подхода нам необходимо решить следующие задачи.

1. Определить алгоритм \mathfrak{L} построения последовательности новых образцов.
2. Доказать, что последовательность решений $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ задач ЛПА, получающихся при последовательном добавлении новых образцов к набору \mathfrak{B} , сходится к точному решению \bar{x} задачи ЛПНО.
3. Определить условие завершения итерационного процесса, при котором \tilde{x}^k будет с приемлемой точностью аппроксимировать точное решение \bar{x} .

Решению этих вопросов посвящены разделы 4 и 5 данной статьи.

В заключение этого раздела введем систему обозначений и опишем ограничения, используемые во всех следующих разделах статьи, если не оговорено противное.

Пусть $D = \{x \mid (a_i, x) \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$ – многогранник, определяемый формализованной частью задачи ЛПНО. Мы предполагаем, что D – телесное множество, то есть D содержит внутренние точки и ограничен. Обозначим $\bar{\varphi}(x) = (d, x) - h$. Перепишем задачу ЛПНО в виде

$$\max \{(c, x) \mid x \in D; \bar{\varphi}(x) \leq 0\}. \quad (1)$$

Мы будем рассматривать случай, когда задача (1) имеет единственное решение:

$$\bar{x} = \arg \max \{(c, x) \mid x \in D; \bar{\varphi}(x) \leq 0\}.$$

Обозначим как ЛПФ задачу линейного программирования с формализованной частью:

$$\max \{(c, x) \mid x \in D\}. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что задача (2) также имеет единственное решение:

$$\hat{x} = \arg \max \{(c, x) \mid x \in D\},$$

причем

$$\hat{x} \neq \bar{x}. \quad (3)$$

Пусть $\bar{P} = \{x \mid \bar{\varphi}(x) \leq 0\}$ – множество значений, удовлетворяющих неформализованному ограничению $\bar{\varphi}(x) \leq 0$. Мы исключаем случай $\bar{\varphi} \equiv 0$. Так как $\bar{\varphi}(x)$ является аффинной функцией, то \bar{P} представляет собой замкнутое полупространство. Допустимое множество значений задачи (1) будет иметь вид $D \cap \bar{P}$. Мы также предполагаем, что $D \cap \bar{P}$ содержит внутренние точки. Наконец, обозначим $\bar{H} = \{x \mid \bar{\varphi}(x) = 0\}$ – гиперплоскость, определяемая неформализованным ограничением.

3. Устойчивость задачи ЛПНО по неформализованному ограничению

Вычислительные методы решения задач линейного программирования с неформализованными ограничениями и организация

самых вычислительных процессов сопряжены с трудностями, связанными с обеспечением точности получаемых результатов в ситуации неточных исходных данных. Главным фактором, позволяющим преодолеть эти трудности, является фактор устойчивости [1]. В данном разделе мы исследуем устойчивость задачи ЛПНО по неформализованному ограничению. Это условие имеет большое значение при исследовании вопросов сходимости, рассматриваемых в разделе 5.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Задача ЛПНО (1) является устойчивой по $\bar{\varphi}$.

Доказательство. Рассмотрим систему ограничений задачи (1):

$$Ax \leq b, x \in \bar{P}. \quad (4)$$

Так как $D \cap \bar{P}$ является ограниченным выпуклым замкнутым многогранником, содержащим внутренние точки, то $\exists x' \in \bar{P}: Ax' < b$. Отсюда по теореме 35.1 [1] получаем, что система (4) является устойчивой по b . В соответствии с теоремой 36.2 [1] из b -устойчивости системы (4) следует устойчивость задачи (1) по b .

По теореме 36.1 [1] из ограниченности множества $D \cap \bar{P}$ следует устойчивость задачи (1) по c .

Имея устойчивость задачи (1) по $[b, c]$, из теоремы 36.7 [1] получаем устойчивость задачи (1) по всей совокупности данных. В частности, мы получаем устойчивость задачи (1) по $\bar{\varphi}$, что и требовалось доказать.

4. Алгоритм порождения образцов

Алгоритм порождения образцов является ключевым фактором практической применимости подхода, описанного в разделе 2. Это связано с тем, что, как уже отмечалось выше, функция экс-

пертизы $\epsilon(x)$ на практике часто имеет ограничение на количество обращений. В соответствие с этим мы должны строить алгоритм порождения образцов таким образом, чтобы количество обращений к функции $\epsilon(x)$ было минимальным.

В общем виде предлагаемый нами алгоритм, обозначим его \mathfrak{L} , может быть определен следующим образом.

Алгоритм \mathfrak{L} . Пусть заданы конечные множества A^0 и B^0 , такие, что $A^0 \subset D \setminus \bar{P}$, $B^0 \subset D \cap (\bar{P} \setminus \bar{H})$. Множества A^0 и B^0 задают начальный набор образцов \mathfrak{P}^0 . Мы предполагаем, что $A^0 \neq \emptyset$ и $B^0 \neq \emptyset$. Алгоритм \mathfrak{L} состоит из следующих шагов:

Шаг 0. $k := 0$.

Шаг 1 (дискриминантный анализ). Найдем аффинную функцию $\tilde{\varphi}^k(x)$, удовлетворяющую условиям

$$\forall x \in A^k : \tilde{\varphi}^k(x) > 0, \quad \forall x \in B^k : \tilde{\varphi}^k(x) < 0. \quad (5)$$

и условию нормализации: вектор нормали к гиперплоскости $\tilde{H}^k = \{x \mid \tilde{\varphi}^k(x) = 0\}$ должен быть коллинеарен вектору нормали к гиперплоскости \bar{H} .

Шаг 2 (порождение образцов). Получим новый образец как решение следующей задачи ЛПА^k:

$$\tilde{x}^k = \arg \max \{(c, x) \mid x \in D, \tilde{\varphi}^k(x) \leq 0\}. \quad (6)$$

Шаг 3 (экспертиза и пополнение \mathfrak{P}).

Если

$$(c, \tilde{x}^k) \notin \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k \cup \bar{H}\}, \quad (7)$$

то положим

$$A^{k+1} = \begin{cases} A^k, & \mathbf{e}(x) \leq 0 \\ A^k \cup \{\tilde{x}^k\}, & \mathbf{e}(x) > 0 \end{cases}$$

$$B^{k+1} = \begin{cases} B^k \cup \{\tilde{x}^k\}, & \mathbf{e}(x) \leq 0 \\ B^k, & \mathbf{e}(x) > 0 \end{cases}.$$

Шаг 4 (рандомизация). Если условие (7) не выполняется, то выполним *процедуру рандомизации*. Пусть

$$\mathfrak{R}^\varepsilon(C) = \{x + r_i^\varepsilon(x) \mid \forall x \in C; i = 1, \dots, m\},$$

где $r_i^\varepsilon(x)$ – случайный вектор в ε -окрестности точки x . Будем называть ε *радиусом рандомизации*, m – *мощностью рандомизации* ($m \geq 1$). Выберем ε_k такое, что

$$0 < \varepsilon_k < \min(\text{dist}(A^k, \bar{H}), \text{dist}(B^k, \bar{H})) \quad (8)$$

(здесь $\text{dist}(A, B) = \inf \{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}$).

Положим:

$$A^{k+1} = A^k \cup \mathfrak{R}^{\varepsilon_k}(A^k), \quad B^{k+1} = B^k \cup \mathfrak{R}^{\varepsilon_k}(B^k).$$

Шаг 5. $k := k + 1$.

Шаг 6. Перейти на шаг 1.

Применение алгоритма \mathfrak{L} для нахождения решения задачи ЛПНО (1) заключается в последовательном вычислении точек \tilde{x}^k , являющихся решением задач ЛПА^k:

$$\max \{(c, x) \mid x \in D, \tilde{\varphi}^k(x) \leq 0\}. \quad (9)$$

Процесс завершается при выполнении некоторого *критерия*, указывающего на то, что очередной \tilde{x}^k оказался в достаточной близости от точного решения \bar{x} . В качестве критерия может фигурировать, например, условие вида

$$\forall i, k - l \leq i < k : \|\tilde{x}^k - \tilde{x}^i\| < \varepsilon, \quad (10)$$

где l – является фиксированным целым положительным числом.

Алгоритм \mathfrak{L} накладывает на разделяющую гиперплоскость \tilde{H}^k , получаемую на шаге 1, ограничение, которое мы назвали условием нормализации. Это условие будет использовано нами при доказательстве теоремы сходимости в разделе 5. Условие нормализации требует, чтобы гиперплоскость \tilde{H}^k , задаваемая разделяющей функцией, была параллельна гиперплоскости \bar{H} , задаваемой неформализованным ограничением. Мы покажем в разделе 6, что условием нормализации можно пренебречь, если в практической реализации алгоритма \mathfrak{L} регулярно выполняется процедура рандомизации.

Условие (8) гарантирует нам выполнение следующих фундаментальных свойств набора образцов $\mathfrak{P}^k = \{A^k, B^k\}$: $A^k \cap \bar{P} = \emptyset$, $B^k \subset \bar{P} \setminus \bar{H}$. Вопрос практической реализации условия (8) будет рассмотрен нами в разделе 6. Там же мы рассмотрим проблему реализации условия (7).

В заключение отметим, что в основе алгоритма \mathfrak{L} лежит алгоритм \mathfrak{A} , описанный в [2]. В отличие от алгоритма \mathfrak{L} , в алгоритме \mathfrak{A} не применяется процедура рандомизации. Кроме этого, в качестве условия нормализации алгоритм \mathfrak{A} использует следующее условие:

$$\forall k: \text{dist}(A^k, \tilde{H}^k) = \text{dist}(B^k, \tilde{H}^k).$$

Для практического использования алгоритма \mathfrak{L} , предложенного в настоящем разделе, важным является вопрос сходимости последовательности $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ к точному решению задачи ЛПНО (1). Сходимость алгоритма \mathfrak{A} была исследована в [3 стр. 173]. Следующий раздел статьи посвящен вопросу сходимости алгоритма \mathfrak{L} .

5. Теорема сходимости

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для последовательности $\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k$, определяемой алгоритмом \mathfrak{L} , имеем:

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}.$$

Доказательству теоремы 2 предположим леммы 1-3.

Лемма 1. Пусть для всех достаточно больших k задача ЛПА^k

$$\tilde{\mu}^k = \max \{ (c, x) \mid x \in D, \tilde{\varphi}^k(x) \leq 0 \},$$

порождаемая алгоритмом \mathfrak{L} , имеет бесконечное множество решений $\tilde{X}^k = \{x \mid x \in D \cap \tilde{P}^k; (c, x) = \tilde{\mu}^k\}$. Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \hat{x}.$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0. \quad (11)$$

Так как $D \cap \bar{P} \setminus \bar{H} \neq \emptyset$, то в силу предположений, объявленных в разделе 2, существуют два различных ребра Y и Z многогранника D такие, что

$$\bar{H} \cap Y \neq \emptyset, \bar{H} \cap Z \neq \emptyset, Y \cap \bar{H} \cap Z = \emptyset. \quad (12)$$

В силу (11) и условия нормализации, отсюда получаем

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{H}^k \cap Y = \{\tilde{y}^k\}, \tilde{H}^k \cap Z = \{\tilde{z}^k\}, \tilde{y}^k \neq \tilde{z}^k. \quad (13)$$

Из (11) и условия нормализации следует, что последовательности $\{\tilde{y}^k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{z}^k\}_{k=0}^{\infty}$ сходятся. Пусть

$$\{\tilde{y}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{y}, \{\tilde{z}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{z}. \quad (14)$$

Очевидно, что

$$\{\bar{y}, \bar{z}\} \subset D \cap \bar{H} \quad (15)$$

и

$$\bar{y} \in Y, \bar{z} \in Z. \quad (16)$$

В силу непрерывности линейного функционала имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c, \tilde{y}^k) = (c, \bar{y}), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (c, \tilde{z}^k) = (c, \bar{z}). \quad (17)$$

Так как задача ЛПФ имеет единственное решение, а задача ЛПА^k для всех достаточно больших k имеет бесконечное множество решений \tilde{X}^k , то $\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{X}^k = D \cap \tilde{H}^k$. Сопоставляя это с (13) получаем

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \{\tilde{y}^k, \tilde{z}^k\} \subset \tilde{X}^k. \quad (18)$$

Из (18) получаем

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{\mu}^k = (c, \tilde{y}^k) = (c, \tilde{z}^k), \quad (19)$$

где $\tilde{\mu}^k = \max \{(c, x) \mid x \in D, \tilde{\varphi}^k(x) \leq 0\}$.

В соответствии с теоремой 1, из (11) и условия нормализации следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}^k = \bar{\mu}, \quad (20)$$

где $\bar{\mu} = (c, \bar{x})$.

Из (17), (19) и (20) получаем

$$(c, \bar{y}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (c, \tilde{y}^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}^k = \bar{\mu},$$

$$(c, \bar{z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (c, \tilde{z}^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}^k = \bar{\mu}.$$

Учитывая (15), отсюда заключаем, что \bar{y}, \bar{z} также являются решениями задачи ЛПНО. Из предположения о единственности решения задачи ЛПНО следует, что $\bar{y} = \bar{x} = \bar{z}$. Вместе с (16) это означает, что

$$D \cap \bar{H} = \{\bar{x}\}. \quad (21)$$

Так как $D \cap \bar{P} \setminus \bar{H} \neq \emptyset$, то из (21) следует, что $D \subset \bar{P}$, откуда в свою очередь следует, что \bar{x} является также решением задачи ЛПФ, то есть $\bar{x} = \hat{x}$. Лемма доказана.

Лемма 2. В контексте алгоритма \mathfrak{L} справедливо следующее утверждение:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0 \Rightarrow \{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}.$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0. \quad (22)$$

Предположим, что $\bar{x} \notin \bar{H}$. Это означает, что \bar{x} является решением задачи ЛПФ, то есть $\bar{x} = \hat{x}$. Получили противоречие с условием (3). Следовательно $\bar{x} \in \bar{H}$. Имеются три взаимоисключающих случая:

1. $\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \notin \tilde{H}^k$,
2. $\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \in \tilde{H}^k$,
3. $\forall k : \exists k_1, k_2 \geq k : \tilde{x}^{k_1} \in \tilde{H}^{k_1}, \tilde{x}^{k_2} \notin \tilde{H}^{k_2}$.

Рассмотрим каждый случай.

Случай 1. Пусть

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \notin \tilde{H}^k. \quad (23)$$

Покажем, что в условиях нашей леммы соотношение (23) не может иметь место. В силу единственности решения задачи ЛПФ из (23) следует

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k = \hat{x}. \quad (24)$$

В совокупности (23) и (24) дают

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{\varphi}^k(\hat{x}) < 0. \quad (25)$$

Предположим сначала, что $\bar{\varphi}(\hat{x}) \leq 0$. Тогда $\bar{x} = \hat{x}$, что противоречит условию (3). Предположим теперь, что

$$\bar{\varphi}(\hat{x}) > 0. \quad (26)$$

В соответствии с определением алгоритма \mathfrak{L} существует $x^0 \in B^0$:

$$\forall k : \tilde{\varphi}^k(x^0) \leq 0 \quad (27)$$

и

$$\bar{\varphi}(x^0) < 0. \quad (28)$$

Из (26) и (28) следует, что точки \hat{x} и x^0 лежат по разные стороны от гиперплоскости \bar{H} . Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0$, то для всех достаточно больших k точки \hat{x} и x^0 будут также лежать по разные стороны от гиперплоскости \tilde{H}^k . Это означает, что для всех достаточно больших k функция $\tilde{\varphi}^k(x)$ будет иметь разные знаки в точках \hat{x} и x^0 . Учитывая это, из (25) получаем $\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{\varphi}^k(x^0) > 0$, что противоречит (27). Это означает, что условие (26) также не может также иметь место. Таким образом, в условиях нашей леммы предположение (23) всегда ложно.

Случай 2. Допустим, что

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \in \tilde{H}^k \quad (29)$$

Пусть $\tilde{X}^k = \{x \mid x \in D, \tilde{\varphi}^k(x) \leq 0, (c, x) = \tilde{\mu}^k\}$ обозначает множество всех решений задачи ЛПА^k:

$$\tilde{\mu}^k = \max \{(c, x) \mid x \in D, \tilde{\varphi}^k(x) \leq 0\}. \quad (30)$$

Имеются три взаимоисключающие возможности:

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{X}^k \setminus \{\tilde{x}^k\} = \emptyset,$$

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{X}^k \setminus \{\tilde{x}^k\} \neq \emptyset,$$

$$\forall k : \exists k_1, k_2 \geq k : \tilde{X}^{k_1} \setminus \{\tilde{x}^{k_1}\} \neq \emptyset, \tilde{X}^{k_2} \setminus \{\tilde{x}^{k_2}\} = \emptyset.$$

Рассмотрим каждую из возможностей.

Возможность 1. Предположим, что

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{X}^k \setminus \{\tilde{x}^k\} = \emptyset.$$

Покажем, что в этом случае \bar{x} и \tilde{x}^k будут принадлежать некоторому общему ребру Y многогранника D для всех достаточно больших k . Предположим противное:

$$\forall k' : \exists k \geq k' : \bar{x} \in Y, \tilde{x}^k \in Z, \bar{x} \notin Z, \tilde{x}^k \notin Y, \quad (31)$$

где Y, Z – ребра многогранника D . Пусть $\bar{\mu} = (c, \bar{x})$. Положим

$$\varepsilon = \min \{ \|\bar{\mu} - \tilde{\mu}\| \mid \tilde{\mu} = (c, \tilde{x}), \tilde{x} - \text{вершина } D, \tilde{x} \neq \bar{x} \} > 0. \quad (32)$$

Из (31) и (32) получаем $\forall k' : \exists k \geq k' : |\bar{\mu} - \tilde{\mu}^k| \geq \varepsilon$. С другой стороны, из (22) и теоремы 1 следует, что $\exists k' : \forall k \geq k' : |\bar{\mu} - \tilde{\mu}^k| < \varepsilon$. Получили противоречие. Следовательно

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \bar{x}, \tilde{x}^k \in Y, \quad (33)$$

где Y – ребро многогранника D . Вместе с (22) и (29) это дает $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{x} - \tilde{x}^k\| = 0$, то есть $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}$, что и требовалось получить.

Возможность 2. Предположим, что

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{X}^k \setminus \{\tilde{x}^k\} \neq \emptyset. \quad (34)$$

Это означает, что задача ЛПА^k (30) имеет бесконечно много решений для всех достаточно больших k . Тогда в соответствии с леммой 1 получаем $\bar{x} = \hat{x}$, что противоречит условию (3).

Возможность 3. Предположим, что

$$\forall k : \exists k_1, k_2 \geq k : \tilde{X}^{k_1} \setminus \{\tilde{x}^{k_1}\} \neq \emptyset, \tilde{X}^{k_2} \setminus \{\tilde{x}^{k_2}\} = \emptyset. \quad (35)$$

Тогда из последовательности $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ можно выделить бесконечную подпоследовательность $\{\tilde{x}^{k'}\}_{k'=0}^{\infty}$, такую, что

$$\forall k' : \tilde{X}^{k'} \setminus \{\tilde{x}^{k'}\} \neq \emptyset. \quad (36)$$

Учитывая, что из (22) следует $\lim_{k' \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^{k'}, \bar{H}) = 0$, мы можем по аналогии с возможностью 2 показать, что условие (36), а следовательно и условие (35) не может иметь место. Таким образом, для случая 2 лемма также доказана.

Случай 3. Пусть $\forall k : \exists k_1, k_2 \geq k : \tilde{x}^{k_1} \in \tilde{H}^{k_1}, \tilde{x}^{k_2} \notin \tilde{H}^{k_2}$. Разделим последовательность $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ на две бесконечные подпоследовательности $\{\tilde{y}^k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\tilde{z}^k\}_{k=0}^{\infty}$ такие, что $\forall k : \tilde{y}^k \in \tilde{H}^k$ и $\forall k : \tilde{z}^k \notin \tilde{H}^k$. Тогда, рассуждая по аналогии со случаями 1 и 2, получим $\{\tilde{y}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}$ и $\{\tilde{z}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}$. Откуда следует $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}$. Лемма полностью доказана.

Лемма 3. Применительно к алгоритму \mathfrak{L} хотя бы одно из следующих условий истинно:

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}; \quad (37)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{co } A^k, \text{co } B^k) = 0 \quad (38)$$

(здесь co – выпуклая оболочка).

Доказательство. Предположим, что условие (37) не выполняется. Покажем, что в этом случае условие (38) истинно. Пусть $\rho_k = \text{dist}(\text{co } A^k, \text{co } B^k)$. Так как $A^{k+1} \supset A^k$, $B^{k+1} \supset B^k$, то $\forall k : \rho_{k+1} \leq \rho_k$. Следовательно существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho \geq 0$. Покажем, что соотношение $\rho > 0$ невозможно. Для этого предположим, от противного, что $\rho > 0$. В этом случае существуют гиперплоскости $H^A = \{x \mid \varphi_A(x) = 0\}$ и $H^B = \{x \mid \varphi_B(x) = 0\}$, удовлетворяющие условию нормализации, такие, что:

$$\text{dist}(H^A, H^B) = \rho; \quad \text{dist}(\bar{H}, H^A) \leq \rho; \quad \text{dist}(\bar{H}, H^B) \leq \rho; \quad (39)$$

$$\forall x \in A^k : \varphi_A(x) \geq 0; \quad \forall x \in B^k : \varphi_B(x) \leq 0 \quad (\forall k); \quad (40)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{co } A^k, H^A) = 0; \quad (41)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{co } B^k, H^B) = 0. \quad (42)$$

Так как мы предположили, что $\rho > 0$, то справедливо хотя бы одно из следующих условий:

$$\text{dist}(H^A, \bar{H}) > 0,$$

$$\text{dist}(H^B, \bar{H}) > 0.$$

Докажем лемму для каждого случая.

Случай (I). Пусть $\text{dist}(H^A, \bar{H}) = \rho_A > 0$. Тогда в силу (41) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{co } A^k, \bar{H}) = \rho_A > 0. \quad (43)$$

Имеются две взаимоисключающие возможности:

1. $\exists k' : \forall k \geq k' : (c, \tilde{x}^k) \notin \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k \cup \bar{H}\}$,
2. $\forall k' : \exists k \geq k' : (c, \tilde{x}^k) \in \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k \cup \bar{H}\}$.

Рассмотрим каждую из возможностей.

Возможность 1. Предположим, что

$$\exists k' : \forall k \geq k' : (c, \tilde{x}^k) \notin \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k \cup \bar{H}\}. \quad (44)$$

По построению алгоритма \mathfrak{L} отсюда следует

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \in A^{k+1} \cup B^{k+1} \cup \bar{H}. \quad (45)$$

Имеются два взаимоисключающих случая:

- a) $\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \in \tilde{H}^k$,
- b) $\forall k' : \exists k \geq k' : \tilde{x}^k \notin \tilde{H}^k$.

Рассмотрим оба случая.

a) Пусть

$$\exists k' : \forall k \geq k' : \tilde{x}^k \in \tilde{H}^k. \quad (46)$$

Тогда

$$\exists k' : \forall k > k' : \text{dist}(\tilde{H}^{k+1}, \tilde{H}^k) > 0. \quad (47)$$

Без ограничения общности мы можем считать, что все \tilde{x}^k лежат по одну сторону от \bar{H} . Тогда по построению алгоритма \mathfrak{L} с учетом (45) и (46) имеем

$$\text{dist}(\tilde{H}^{k+1}, \bar{H}) \leq \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}).$$

Учитывая (47), отсюда получаем

$$\text{dist}(\tilde{H}^{k+1}, \bar{H}) < \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}).$$

Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0.$$

В соответствии с леммой 2 это влечет

$$\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x},$$

что противоречит нашему предположению, что условие (37) не выполняется.

b) Пусть

$$\forall k' : \exists k \geq k' : \tilde{x}^k \notin \tilde{H}^k. \quad (48)$$

Если $\tilde{x}^k \notin \tilde{H}^k$, то \tilde{x}^k является одной из вершин многогранника D .

Так как количество вершин конечно, то из (48) следует

$$\forall k' : \exists k \geq k' : \tilde{x}^k \in A^k \cup B^k \quad (49)$$

Однако (49) противоречит предположению (44).

Возможность 2. Предположим, что

$$\forall k : \exists k' \geq k : (c, \tilde{x}^k) \in \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k \cup \bar{H}\}. \quad (50)$$

В силу (41), для любого наперед заданного положительного δ , при достаточно большом k , $\exists x' \in A^k$:

$$\text{dist}(\{x'\}, H^A) < \delta.$$

Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, где

$$\varepsilon = \frac{\min(\text{dist}(H^A, \bar{H}), \text{dist}(H^B, \bar{H}))}{2}. \quad (51)$$

В соответствии с предположением (50) алгоритм \mathfrak{L} будет выполнять процедуру рандомизации бесконечное число раз. При этом в соответствии с (8) в качестве радиуса рандомизации мы можем взять положительную константу ε , задаваемую формулой (51). Но тогда

$$\rho_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{co } A^k, \bar{H}) \leq \text{dist}(S^{x'}, \bar{H}) < \text{dist}(H^A, \bar{H}) - \frac{\varepsilon}{2} = \rho_A - \frac{\varepsilon}{2},$$

где $S^{x'}$ – сфера с центром в точке x' и радиусом ε . Получили противоречие.

Случай (II). Доказывается аналогично случаю (I). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. В соответствии с леммой 3 нам необходимо рассмотреть случай, когда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\text{co } A^k, \text{co } B^k) = 0. \quad (52)$$

Так как гиперплоскости \tilde{H}^k и \bar{H} являются разделяющими для множеств A^k и B^k , то, в силу условия нормализации, из (52) непосредственно следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\tilde{H}^k, \bar{H}) = 0.$$

Отсюда по лемме 2 получаем $\{\tilde{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \rightarrow \bar{x}$. Теорема доказана.

6. Реализация алгоритма \mathfrak{L}

Реализация алгоритма \mathfrak{L} непосредственно в том виде, как он был описан в разделе 4, на практике не всегда возможно. Прежде всего это относится к условию нормализации. Во многих случаях эксперт не в состоянии определить нормаль к гиперплоскости, задаваемой неформализованным ограничением. Следующая теорема показывает, что при определенных обстоятельствах мы можем пренебречь неформализованным ограничением.

Теорема 3. Пусть L^ε – плоский слой толщины $\varepsilon > 0$, серединой которого является гиперплоскость \bar{H} , задаваемая неформализованным ограничением. Обозначим через \mathfrak{L}' алгоритм, получающийся из алгоритма \mathfrak{L} путем снятия ограничения на $\tilde{\varphi}^k$, связанного с выполнением условия нормализации. Тогда, если для алгоритма \mathfrak{L}' выполняется условие

$$\forall k' : \exists k \geq k' : (c, \tilde{x}^k) \notin \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k \cup \bar{H}\}, \quad (53)$$

то

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists k' : \forall k \geq k' : (\tilde{H}^k \cap D) \subset (L^\varepsilon \cap D).$$

Доказательство. Пусть C – n -мерный цилиндр с осью $\bar{\eta}$, обладающий свойством $D \subset C$. Пусть S – проекция C на гиперплоскость \bar{H} . Обозначим через d диаметр $(n-1)$ -мерной сферы S . Выберем $(n-1)$ пар точек $\{x^i, y^i\} \subset S$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$\|y^i - x^i\| = d;$$

$$(y^i - x^i, y^j - x^j) = 0, \quad i \neq j.$$

Построим n -мерные сферы s_x^i и s_y^i с центрами в точках x^i и y^i

соответственно ($i = 1, \dots, n-1$) и радиусом $r = \frac{d \varepsilon / 2}{\sqrt{d^2 + (\varepsilon / 2)^2}}$.

Условие (53) означает, что алгоритм \mathfrak{L}' бесконечное число раз будет выполнять процедуру рандомизации. Следовательно,

$$\exists k' : A^{k'} \cap s_x^i \neq \emptyset, A^{k'} \cap s_y^i \neq \emptyset, B^{k'} \cap s_x^i \neq \emptyset, B^{k'} \cap s_y^i \neq \emptyset \quad (i=1, \dots, n-1).$$

Это означает, что

$$\forall k > k' : \tilde{H}^k \cap s_x^i \neq \emptyset, \tilde{H}^k \cap s_y^i \neq \emptyset \quad (i=1, \dots, n-1).$$

В соответствии со способом построения s_x^i и s_y^i отсюда получаем

$$\forall k > k' : (\tilde{H}^k \cap C) \subset (L^\varepsilon \cap C).$$

Учитывая, что $D \subset C$, отсюда следует

$$\forall k > k' : (\tilde{H}^k \cap D) \subset (L^\varepsilon \cap D).$$

Теорема доказана.

Теорема 3 показывает, что, если при поиске приближенного решения с помощью алгоритма \mathfrak{L}' регулярно выполняется рандомизация, то при k , стремящемся к бесконечности, \tilde{H}^k «стремится стать параллельной» к \bar{H} . Нами была проведена серия вычислительных экспериментов по решению различных задач ЛПНО с помощью метода, базирующегося на алгоритме \mathfrak{L}' [4]. Во всех экспериментах на завершающей стадии вычислений наблюдалось регулярное обращение к процедуре рандомизации. В соответствии с этим на практике мы можем пренебречь условием нормализации без потери эффективной сходимости.

Отметим, что при реализации алгоритма \mathfrak{L} в виде компьютерной программы необходимо вместо условия (7) использовать условие $(c, \tilde{x}^k) \notin \{(c, x) \mid x \in A^k \cup B^k\}$, не требующее знания неформализованного ограничения. Учитывая приближенный характер компьютерных вычислений, мы вправе считать эти два условия эквивалентными.

В заключение этого раздела рассмотрим вопрос реализации условия (8) при написании компьютерной программы. В качестве радиуса рандомизации следует взять некоторую константу $\varepsilon > 0$. При этом для сохранения корректности вычислительного процесса необходимо все образцы, полученные в результате выполнения процедуры рандомизации, отправлять на экспертизу. Оче-

видно, что в этом случае мы сохраним эффективную сходимость. Для уменьшения количества экспертиз процедуру рандомизации следует применять только к образцу \tilde{x}^k , полученному на последнем шаге.

7. Заключение

В данной работе была рассмотрена проблема решения задач линейного программирования с неформализованным ограничением. Предложен общий алгоритм решения таких задач, базирующийся на дискриминантном анализе и экспертизе новых образцов. Каждый новый образец получается как решение аппроксимационной задачи линейного программирования, где вместо неформализованного ограничения фигурирует неравенство на основе разделяющей функции. В случае, когда решение аппроксимационной задачи уже присутствует в наборе образцов, применяется процедура рандомизации. Для описанного алгоритма была доказана теорема сходимости и рассмотрены вопросы его практической реализации.

Нами была написана программная реализация [5] предложенного алгоритма на языке Си, в которой аппроксимационная задача решается с помощью симплекс-метода, а для дискриминантного анализа используется метод линейной коррекции. Вычислительные эксперименты, проведенные с помощью этой программы, подтвердили применимость метода для решения задач линейной оптимизации большой размерности.

В качестве направлений дальнейших исследований можно выделить следующие задачи. Во-первых, нами планируется создание программного комплекса, в котором будут реализованы несколько альтернативных блоков для решения задач линейного программирования и дискриминантного анализа (в дополнение к симплекс-методу и методу линейной коррекции предполагается

реализовать методы фейеровского типа [6] и метод комитетов [3]). Предполагается провести серию экспериментов с различными сочетаниями блоков и выполнить на ее основе сравнительный анализ эффективности возможных подходов. В рамках этих экспериментов будут также исследованы вопросы оптимального выбора параметров алгоритма, включая радиус и мощность рандомизации. Во-вторых, представляет интерес доказательство сходимости представленного в этой статье алгоритма при более слабых ограничениях. В частности, возникает гипотеза о том, что теорема сходимости остается справедливой и в случае устранения условия нормализации. В пользу этой гипотезы свидетельствуют теорема 3 настоящей статьи и проведенные нами эксперименты на реальных и искусственных задачах [4]. В-третьих, необходимы дополнительные исследования в области задач линейной оптимизации с двумя и более неформализованными ограничениями. Это касается как разработки новых итерационных методов их решения, так и вопросов сходимости.

Библиография

1. *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. –Екатеринбург: Издательство “Екатеринбург”, 1999.
2. *Мазуров Вл.Д.* Дискриминантный анализ при математическом моделировании плохо формализуемых ситуаций // Нелинейная оптимизация и приложения в планировании. –Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. -С. 26-35.
3. *Мазуров Вл.Д.* Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации. -М.: Наука, 1990.
4. *Соколинская И.М.* Численные эксперименты по решению задач ЛПНО методом СМ/ЛК. Технический отчет РФФИ#03-01-0056/Y2N2. –Челябинск: ЧелГУ, 2004.
5. *Соколинская И.М.* Метод осцилляций в задачах линейного программирования с неформализованным ограничением // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Все-

рос. конф., Екатеринбург, 2-6 февр. 2004 г. -Екатеринбург:
Изд-во Урал. ун-та, 2004. -С. 302-303.

6. *Еремин И.И., Соколинская И.М.* Фейеровские итерационные процессы для несобственных задач линейного программирования // Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр. / Омск: Омск. гос. ун-т. -2002. Вып. 9. -С. 10-26.