Параллельный метод решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений

А.В. Ершова
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск
e-mail: ershovaav@gmail.com

Рассматривается задача сильной отделимости двух многомерных выпуклых непересекающихся многогранников,имеющая большое значение теоретического и прикладного характера. Задача сильной отделимости - это задача нахождения слоя наибольшей толщины, разделяющего два выпуклых непересекающихся объекта. В нашем случае необходимо разделить два выпуклых многогранника $M \subset \mathbb{R}^n$ и $N \subset \mathbb{R}^n$, заданных системами линейных неравенств $M = \{x \,|\, Ax \leqslant b\} \neq \emptyset$, $N = \{x \,|\, Bx \leqslant d\} \neq \emptyset$, $M \cap N = \emptyset$.

Задача сильной отделимости может быть решена в ходе итерационного процесса, использующего операцию проектирования. Однако на практике применение этого метода существенно ограничивается тем, что далеко не всегда удается построить конструктивную формулу для вычисления проекции точки на выпуклое множество. Поэтому целесообразно заменить операцию проектирования последовательностью фейеровских отображений. Указанный метод был предложен И.И. Ереминым в работе [1]. На основе предложенного метода был разработан алгоритм F разделения выпуклых многогранников с помощью фейеровских отображений [2].

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана конечная система линейных неравенств $Ax \leq b : l_j(x) = (a_j, x) - b_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, m$, где $a_j \neq 0$ для любого j. Определим $l_j^+(x) = max\{l_j(x), 0\}$, $j = 1, \ldots, m$.

Фейеровское отображение имеет вид: $\varphi(x) = x - \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda_j \frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2 a_j}$ для любой системы положительных коэффициентов $\{\alpha_j > 0\}$, $j = 1, \ldots, m$, таких, что $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ и коэффициентов релаксации $0 < \lambda_j < 2$.

Для решения задачи сильной отделимости был предложен параллельный алгоритм, в основе которого лежит подход разбиения на подвекторы. Пусть $\varphi(x)$ - произвольное фейеровское отображение относительно множества , $\varphi \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$. Разобьем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ на r подвекторов $x = [x_1, \ldots, x_r]$, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ и $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_r}$. Обозначив через $\pi_i(x)$ проекцию x на $\mathbb{R}^i$, определим отображения $\varphi_i(x) = \pi_i(\varphi(x)) + \sum_{j \neq i} \pi_j(x)$ и положим $\varphi\bar{(}x) = \alpha \sum_{i=1}^r \pi_i\left(\varphi_i^K(x)\right)$, $0 < \alpha < 1$ при некотором фиксированном натуральном K. При определенных условиях отображение $\bar{\varphi}$ будет M-фейеровским. Таким образом, на базе одного фейеровского отображения мы сконструировали другое, обладающее большим ресурсом параллелизма. Действительно, значения $\varphi_i^K(x)$ могут вычисляться независимо друг от друга для различных $i = 1, \ldots, r$. При этом мы получаем две степени свободы для регулировки баланса загрузки процессорных узлов. Во-первых, увеличивая K, мы можем повышать вычислительную нагрузку на процессорный узел между двумя соседними итерациями, вычисляющими $\bar{\varphi}(x)$. Во-вторых, мы можем произвольным образом перераспределять координаты вектора x между процессорами.

При реализации параллельной версии алгоритма F применение фейеровского отображения K раз к каждому подвектору оформлялось в виде независимого процесса. Далее происходил обмен вычисленными $\varphi_i^K(x)$ между процессорами. Для организации обменов данными между процессами была использована система параллельного программирования MPI, основанная на передаче сообщений.

Были проведены вычислительные эксперименты на высокопроизводительном кластере по исследованию поведения алгоритма F на различных модельных задачах и по исследованию масштабируемости описанной параллельной версии алгоритма F, подтверждающие эффективность предложенных подходов [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00546а.

Литература

[1] *Еремин И.И.* Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации / Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. - 199 с.

[2] *Ершова А.В.* Алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений // Системы управления и информационные технологии. - 2009. - № 1(35). - С. 53–56.

[3] *Ершова А.В., Соколинская И.М.* Параллельный алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений // Научный сервис в сети Интернет: суперкомпьютерные центры и задачи: Труды международной научной конференции (Новороссийск, 20-25 сентября 2010 г.). М.: Изд-во МГУ, 2010. - С. 242–248.