

# ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАЗДЕЛЕНИЯ ДВУХ ВЫПУКЛЫХ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ МНОГОГРАННИКОВ<sup>1</sup>

*А.В. Ершова*

В математике фундаментальную роль играют теоремы отделимости непересекающихся множеств, в частности, выпуклых (в разных пространствах). При этом важны как теоремы существования, так и алгоритмы, реализующие отделимость. Имеется много задач, как теоретического характера, так и прикладного, когда необходимо конструктивно обеспечивать разделимость. Одна из областей, в которых алгоритмическая сторона дела играет важнейшую роль – это распознавание образов, включающее задачи дискриминации, классификации и др. [1].

Задача сильной отделимости может быть решена в ходе итерационного процесса, использующего операцию проектирования. Однако на практике применение этого метода существенно ограничивается тем, что далеко не всегда удается построить конструктивную формулу для вычисления проекции точки на выпуклое множество. Поэтому целесообразно заменить операцию проектирования последовательностью фейеровских отображений. Указанный метод был предложен И.И. Ереминым в работе [2].

Сформулируем задачу сильной отделимости [1]. Пусть даны два выпуклых непересекающихся многогранника  $M \subset R^n$  и  $N \subset R^n$ , заданные системами линейных неравенств:

$$\begin{aligned}M &= \{x \mid Ax \leq b\} \neq \emptyset, \\N &= \{x \mid Bx \leq d\} \neq \emptyset, \\M \cap N &= \emptyset.\end{aligned}\quad (1)$$

*Задача сильной отделимости* – это задача нахождения слоя наибольшей толщины, разделяющего  $M$  и  $N$ . Сильная отделимость, по существу, эквивалентна задаче отыскания расстояния между  $M$  и  $N$  в смысле метрики

$$\rho(M, N) = \min \{\|x - y\| \mid x \in M, y \in N\}. \quad (2)$$

На основе подробного теоретического исследования был определен и описан алгоритм **F** [3] разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с помощью фейеровских отображений.

Выполнена программная реализация алгоритма **F** на языке C++ (тексты программы доступны в Интернет по адресу <http://life.susu.ru/dscr>). С помощью этой программы было проведено экспериментальное исследование поведения алгоритма **F** для различных выпуклых многогранников. Во всех случаях наблюдалась сходимость процесса к циклу неподвижности. При этом в результате мы получали отрезок, определяющий слой наибольшей

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00546а и грантом Роснауки по поддержке ведущих научных школ НШ-5595.2006.1.

толщины, с заданной точностью. Для проведения вычислительных экспериментов было исследовано поведение алгоритма **F** для фейеровских отображений 1-ого и 2-ого типов. Использовались два класса задач. Первый класс – сконструированные модельные масштабируемые задачи *Model-n*. Второй класс *Random* – задачи, генерируемые случайным образом специальным алгоритмом.

Работа алгоритма **F** для одной из задач класса *Model-n* при  $n = 3$  с построенными фейеровскими отображениями и полученным циклом неподвижности проиллюстрирована на Рис. 1.

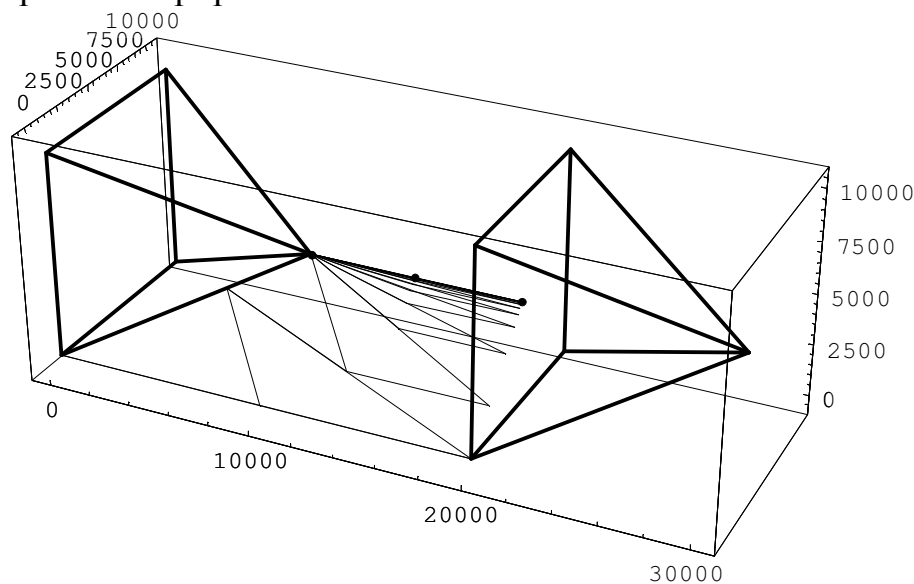


Рис. 1. Построение фейеровских отображений для задачи *Model-n* при  $n = 3$ .

В первой серии вычислительных экспериментов было исследовано влияние размерности задачи *Model-n* на эффективность алгоритма. Размерность задачи  $n$  варьировалась в диапазоне от 10 до 80. Исследовались зависимости количества итераций и времени решения задачи от размерности  $n$  при разных типах фейеровских отображений.

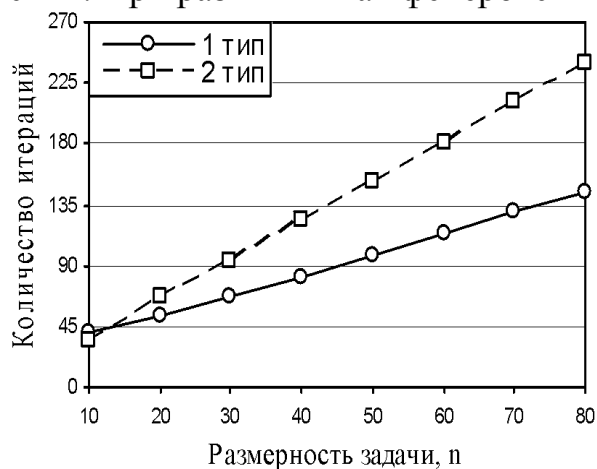


Рис. 2. Зависимость количества итераций от размерности  $n$ .

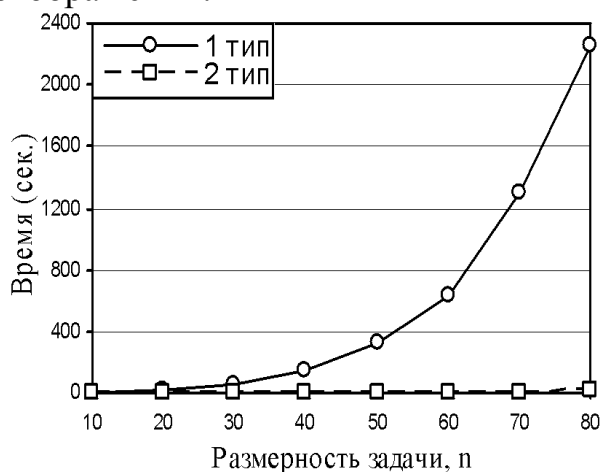


Рис. 3. Зависимость времени решения задачи от размерности  $n$ .

Результаты этих экспериментов показывают (Рис. 2 и Рис. 3), что количество итераций для обоих типов фейеровских отображений растет с увеличением размерности. При этом алгоритм, использующий 1 тип, решает задачу за меньшее количество итераций, однако, существенно проигрывает алгоритму, использующему 2 тип, по времени решения задачи для всех размерностей.

Во второй серии экспериментов была исследована зависимость длины отрезка  $q_k$  от номера итерации, где  $q_k = \|x_k - y_k\|$  – длина отрезка между соответствующими точками фейеровских отображений на многогранники  $M$  и  $N$ . Результаты исследования приведены на Рис. 4.

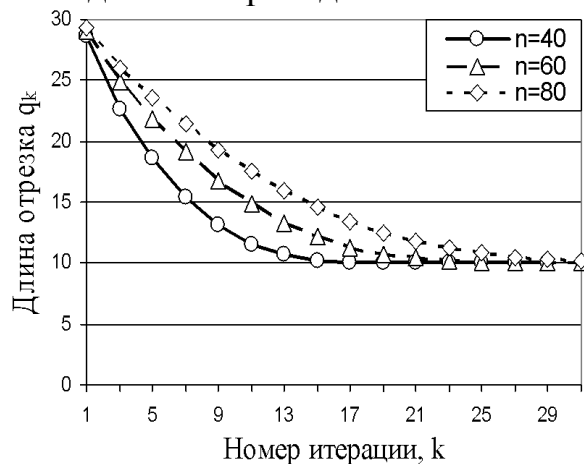


Рис. 4. Зависимость длины отрезка  $q_k$  от номера итерации.

Задача решалась для трех размерностей:  $n = 40$ ,  $n = 60$  и  $n = 80$ . Был выбран вариант алгоритма, использующий 1 тип фейеровских отображений.

Этот эксперимент показывает, что при работе алгоритма количество итераций до достижения цикла неподвижности существенно не меняется для различных размерностей.

Для проведения вычислительных экспериментов на задачах класса *Random* была написана программа, генерирующая случайным образом специальным алгоритмом два выпуклых непересекающихся многогранника в виде систем линейным неравенств.

Для сравнительного анализа работы алгоритма F на модельных и случайных задачах были проведены вычислительные эксперименты по исследованию количества итераций и времени решения задачи от размерности  $n$ . В эксперименте участвовали задачи классов *Model-n* и *Random*, размерность которых варьировалась в диапазоне от 10 до 80. Был использован вариант алгоритма с 1 типом фейеровских отображений. Для экспериментов с классом задач *Random* генерировались случайным образом серии из 10 задач для каждой размерности. В качестве результата использовались усредненные значения количества итераций и времени решения задачи в каждой серии.

Результаты экспериментов приведены на рисунках 5 и 6. Они показывают, что алгоритм  $F$  демонстрирует на случайных задачах поведение, сходное с поведением на модельных задачах, однако разница в скорости сходимости двух типов фейеровских отображений для случайных задач уже не столь существенна.

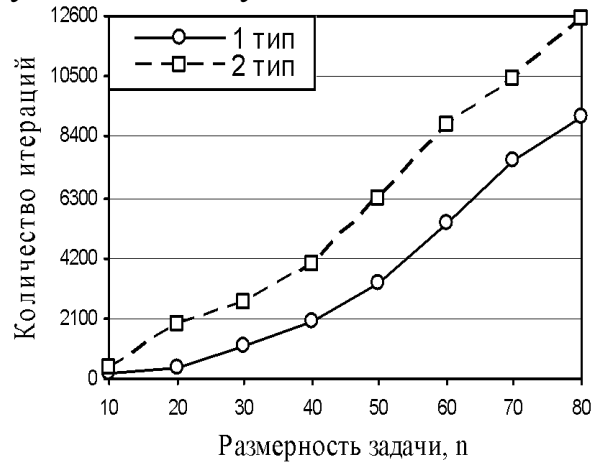


Рис. 5. Зависимость количества итераций от размерности  $n$ .

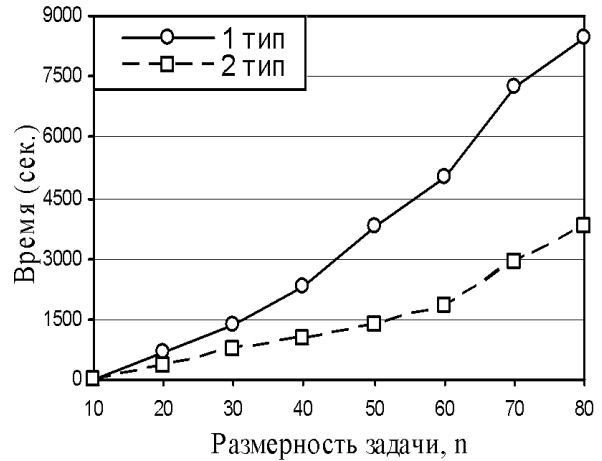


Рис. 6. Зависимость времени решения задачи от размерности  $n$ .

Был рассмотрен итерационный алгоритм  $F$  для решения задачи разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников слоем наибольшей толщины. Этот алгоритм базируется на методе, использующем проектирования с помощью фейеровских отображений. Проведены вычислительные эксперименты по исследованию эффективности алгоритма  $F$  на сконструированных модельных масштабируемых задачах *Model-n* и задачах *Random*, генерируемых случайным образом специальным алгоритмом. Использовались фейеровские отображения 1 и 2 типов. Проведенные эксперименты подтвердили эффективность предложенного подхода. Исходные тексты программ свободно доступны в Интернет по адресу: <http://life.susu.ru/sources.html>.

#### Библиографический список

1. Еремин И.И. Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств // Известия вузов. Сер. математика. -2006. -№ 12. -С. 33-43.
2. Еремин И.И., Мазуров В.Д. Нестационарные процессы математического программирования. -М.: Наука, 1979. -288 с.
3. Ершова А.В. Алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений // Системы управления и информационные технологии. -2009. -№ 1(35). -С. 53-56.