УДК 519.6

©2003г. Е.А. БЕРДНИКОВА,
И.И. ЕРЕМИН, акад.,
Л.Д. ПОПОВ, д–р физ.–мат. наук

(Институт математики и механики УрО РАН, г.Екатеринбург)

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ [1]

Рассматриваются собственные (разрешимые) и несобственные (не имеющие решения в обычном смысле) задачи линейного программирования 1-го, 2-го и 3-го рода. Они редуцируются к системам линейных неравенств, совместным или несовместным. Для численного анализа последних строятся различные варианты фейеровских итерационных методов (процессов), сходящихся соответственно к решениям или квазирешениям указанных систем. Обсуждаются вопросы, связанные с эффективной программной реализацией этих методов, в частности, вопросы их декомпозиции и параллельных вычислений.

1. Введение

В статье рассматриваются различные схемы применения фейеровских итерационных методов [1, 2] для нахождения решений (или квазирешений) систем линейных неравенств и/или уравнений и задач линейного программирования (ЛП), не обязательно разрешимых. Последние в этом случае называются несобственными и делятся на несобственные задачи 1-го, 2-го и 3-го рода [3]. Также обсуждаются вопросы эффективной реализации этих методов для задач ЛП большой размерности на основе принципов декомпозиции, распараллеливания и использования многопроцессорных компьютеров.

Итерационные фейеровские методы привлекательны простотой итерации, обычно имеющей формульный вид. Методы содержательны в ситуации эволюционирующей (изменяющейся) системы исходных данных, в этом случае вычислительный процесс может выступать в роли нестационарной модели отслеживания обсчитываемого объекта (если речь идет о прикладной задаче, например, задаче о финансовых потоках). При использовании итерационных методов смягчается также проблема накопления ошибок, столь остро стоящая при применении конечных методов. Недостатком итерационных методов является обычно их медленная сходимость (в фейеровских методах — сходимость по геометрической прогрессии). Однако при больших вычислительных мощностях этот недостаток не является слишком ограничительным. В ламинарных обстоятельствах скорости сходимости (или скорости отслеживания) может вполне хватить. Впрочем, эти вопросы являются скорее атрибутами конкретных применений.

В основе фейеровских методов лежит операция проектирования на простейшие выпуклые множества, такие как неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq 0\}$, ги-

[1] Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, гранты No. 01-01-00563, 03-01-00565, а также Целевой программой поддержки междисциплинарных проектов, выполняемых в содружестве ученых УрО РАН и СО РАН.

перплоскость $\mathcal{H} := \{x \,|\, (a,x) = \beta\}$, полупространство $\mathcal{P} := \{x \,|\, (a,x) \leq \beta\}$, линейное многообразие $\mathcal{L} := \{x \,|\, Ax = b\}$, параллелепипед $\mathcal{S} := \{x \,|\, a \leq x \leq d\}$ и др. Итерация метода синтезируется в форме некоторой конечной последовательности таких проектирований. Простейшие проектирования выступают в роли элементарных «кирпичиков», из которых строится сам метод, допускающий большой параллелизм в выполнении тех или иных своих частей.

Сразу дадим пояснения относительно элементарных операций проектирования. Так проектирование на $\mathbb{R}^n_+$ — это просто *положительная срезка* проектируемого вектора x, т. е. $\mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^n_+}(x) = [x_1^+, \ldots, x_n^+]^T$, где $x_i^+ = \max\{0, x_i\}$. Проектирование на гиперплоскость $\mathcal{H} := \{x \,|\, l(x) := (a,x) - \gamma = 0\}$ реализуется формулой

$$\mathrm{Pr}_{\mathcal{H}}(x) = x - \frac{l(x)}{|a|^2} \cdot a;$$

здесь и далее $|a|$ — евклидова норма вектора a. В случае проектирования на полупространство $\mathcal{P} := \{x \,|\, l(x) := (a,x) - \gamma \leq 0\}$ имеем

$$\mathrm{Pr}_{\mathcal{P}}(x) = x - \frac{l^+(x)}{|a|^2} \cdot a.$$

Если $\mathcal{L} := \{x \,|\, Ax = b\}$, то

$$\mathrm{Pr}_{\mathcal{L}}(x) = x - A^T(AA^T)^{-1}(Ax - b) \tag{1}$$

в предположении линейной независимости строк матрицы A.

Трудоемкость и точность машинной реализации последней операции проектирования зависит от размерности и обусловленности матрицы A. Ниже мы покажем, что в фейеровских методах при построении итерации размерами и обусловленностью используемых матриц можно управлять.

С помощью фейеровских операторов легко строятся последовательности приближений к решению некоторой задачи. Пусть, например, речь идет о поиске решения системы

$$Ax = b, \; x \geq 0.$$

Возьмем непрерывное отображение $\varphi(x) := \left[\mathrm{Pr}_{\mathcal{L}}(x)\right]^+$, где $\mathcal{L} = \{x \,|\, Ax = b\}$, произвольное начальное приближение x_0 и построим простейший сходящийся итерационный процесс:

$$\{\varphi^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty} \to \bar{x} \in \mathcal{L}_+ \,(= \mathbb{R}^n_+ \bigcap \mathcal{L}). \tag{2}$$

Заметим, что в формировании $\varphi(x)$ участвует обращение матрицы AA^T. Если размерность последней велика, можно поступить следующим образом: разбить матрицу A и вектор b на горизонтальные полосы согласованной размерности $\{A_j\}_1^{m_0}$ и $\{b_j\}_1^{m_0}$, образовать частные операторы $\varphi_j(x) = \mathrm{Pr}_{\mathcal{L}_j}(x)$, где $\mathcal{L}_j := \{x \,|\; A_j x = b_j\}$, $j = 1, \ldots, m_0$, и положить

$$\varphi(x) := \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j \varphi_j^+(x), \quad \text{где все} \;\; \alpha_j > 0, \; \sum_{j=1}^{m_0} \alpha_j = 1.$$

Новое отображение также обладает свойством (2). Однако теперь при вычислении $\varphi(x)$ необходимо обращать матрицы $A_j A_j^T$ меньших размеров, причем эти обращения можно выполнять одновременно и независимо друг от друга, например на разных процессорах некоторой вычислительной сети.

Вместо оператора $\varphi(x)$ в (2) можно также взять суперпозицию частных отображений

$$\psi(x) = [\,\varphi_1(\varphi_2(\ldots\varphi_{m_0-1}(\varphi_{m_0}(x))\ldots)]^+ .$$

Генерируемая этим оператором последовательность $\{\psi^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ также будет сходиться к некоторому вектору $\bar{x}$, являющемуся или решением системы $Ax = b,\ x \geq 0$ — в случае ее совместности, или *квазирешением* — в случае несовместности. Заметим, что в случае системы линейных неравенств $Ax \leq b,\ x \geq 0$ возможна очевидная редукция к системе $Ax + v = b,\ x \geq 0,\ v \geq 0$; последняя имеет только что рассмотренный вид.

Обратимся далее к задачам ЛП. Применительно к задаче ЛП, записанной, например, в форме

$$\min\{(c, x) \,|\, Ax = b, \quad x \geq 0\}, \tag{3}$$

фейеровскую технологию можно применить посредством редукции задачи (3) к так называемой *симметрической* системе неравенств и уравнений

$$\left.\begin{array}{llll} Ax & & & = b, \\ & A^T u & + \ v & = c, \\ c^T x & - \ b^T u & & = 0, \\ \multicolumn{4}{l}{x \geq 0,\ u \geq 0,\ v \geq 0.} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Матрица этой системы имеет блочную структуру, причем эту естественную структуризацию можно дополнить искусственным приемом, заключающимся в разрезе исходной матрицы A на горизонтальные и вертикальные подматрицы A_j и B_i :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{m_0} \end{bmatrix} = [\,B_1 \ldots B_{n_0}\,]. \tag{5}$$

Вместе с матрицей на блоки соответствующей размерности расчленяются также векторы c и b. Это дает возможность применять, например, приемы понижения размерности обращаемых матриц и контроля степени их обусловленности.

Таким образом, очень важно, что при построении фейеровских операторов применительно к системам линейных неравенств и задачам ЛП все особенности структуры исходных данных могут быть учтены, выстроены в сегменты параллельных для обработки блоков при минимальных обменах между ними. Это дает широкий простор для использования принципа распараллеливания и порождает определенный оптимизм в использовании фейеровских процессов для решения больших задач ЛП на многопроцессорных вычислительных сетях самой разной архитектуры.

Некоторый опыт практического применения методов фейеровского типа изложен в работах [4, 5].

2. Фейеровские отображения и процессы

Пусть задано некоторое непустое множество $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через F_M класс M-фейеровских отображений $\varphi(\cdot) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$; последние определяются условием

$$\varphi(y) = y, \quad |\varphi(x) - y| < |x - y|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M. \tag{6}$$

Класс непрерывных M-фейеровских отображений обозначим $\bar{F}_M$.

Отображение $\varphi(\cdot) \in \{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ назовем нестрого M- фейеровским, если в (6) строгое неравенство “$<$” заменить на “$\leq$”. Этот класс отображений обозначим F'_M.

Определение M-фейеровского отображения обобщается на точечно-множественный аналог $\varphi(\cdot) \in \{\mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}\}$ соотношениями

$$\varphi(y) = y, \quad |z - y| < |x - y|, \quad \forall y \in M, \quad \forall x \notin M, \quad \forall z \in \varphi(x).$$

Относительно фейеровских отображений справедливы следующие *у т в е р ж д е н и я*:

1. $\varphi(\cdot) \in \bar{F}_M \Longrightarrow \{\varphi^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty} \to \bar{x} \in M$.

2. $\varphi(\cdot) \in F'_M \Longrightarrow \forall \alpha \in (0,1): \quad \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)x =: \ \varphi_\alpha(x) \in F_M$.

3. $F_M \neq \emptyset \Longrightarrow M$ — выпукло и замкнуто.

4. Если $\varphi(x)$ является точечно-множественным M-фейеровским отображением и к тому же замкнуто (т. е. из $\{x_k\} \to \bar{x}$, $\{y_k\} \to \bar{y}$, $y_k \in \varphi(x_k)$ следует $\bar{y} \in \varphi(\bar{x})$), то (по аналогии с утверждением 1)

$$\{x_{k+1} \in \varphi(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \to x' \in M.$$

5. Если $\varphi_j(\cdot) \in F_{M_j}$, $j = 1, \ldots, m$, причем $M := \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \emptyset$, то для любой системы положительных весовых коэффициентов $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, имеем

$$\varphi(x) := \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x) \in F_M.$$

6. В обозначениях предыдущего пункта справедливо

$$\psi(x) = \varphi_1(\varphi_2(\ldots \varphi_{m-1}(\varphi_m(x))\ldots) \in F_M.$$

Приведем наиболее простые примеры фейеровских отображений.

Пример 1. Пусть $M = \bigcap_{j=1}^m M_j \neq \emptyset$, где $M_j = \{x \,|\, l_j(x) := \ (a_j, x) - b_j \leq 0\}$. Тогда

$$\varphi_j(x) = x - \lambda_j \tfrac{l_j^+(x)}{|a_j|^2} \cdot a_j \in F_{M_j},$$
$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(x) = x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_j \tfrac{l_j^+(x)}{|a_j|^2} \ \in F_M;$$

здесь все $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$; все $\lambda_j \in (0,\, 2)$.

Пример 2. В обозначениях предыдущего примера положим $d(x) = \sum_{j=1}^m l^{+^2}(x)$, $\widetilde{M} = \operatorname{Arg} \min\limits_{(x)} d(x)$. Пусть $\delta = \sum_{j=1}^m |a_j|^2$, $\alpha_j = |a_j|^2/\delta$, $\lambda_j = \lambda \in (0,2)$. Тогда

$$\varphi(x) := x - (\lambda/2\delta)\nabla d(x) \in F_{\widetilde{M}}. \tag{7}$$

Пример 3. В обозначениях примера 1 имеет место

$$\psi(x) = \varphi_1(\varphi_2(\ldots(\varphi_m(x))\ldots) \in F_M. \tag{8}$$

Пример 4. Если M — выпуклое замкнутое множество, то

$$\operatorname{Pr}_M(x) \in \bar{F}_M. \tag{9}$$

Пример 5. В обозначениях примера 1 имеет место

$$\varphi(x) := \; x - \lambda \, \frac{a_{j_x}}{|a_{j_x}|^2} \; \max_{(j)} l_j^+(x) \; \in F_M; \tag{10}$$

здесь j_x — любой из индексов, на котором достигается $\max\limits_{(j)} l_j^+(x)$. Заметим, что $\varphi(x)$ — точечно-множественное отображение.

Пример 6. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, $M = \{x \,|\, f(x) \le 0\} \ne \emptyset$, $\lambda \in (0, 2)$. Определим отображение

$$\varphi(x) = \begin{cases} \bigcup\limits_{h \in \partial f(x)} \left(x - \lambda f^+(x) \dfrac{h}{|h|^2} \right), & \text{если } 0 \notin \partial f(x); \\ x & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ — замкнутое M-фейеровское отображение.

3. Базовые теоремы сходимости

Приведем ряд теорем, которые позволят нам построить фейеровские итерационные методы для несобственных задач ЛП по родам их несобственности (т. е. 1-го, 2-го и 3-го рода). Первая из этих теорем имеет своим основанием свойства 1, 5 и 6 из параграфа 2.

Пусть $\{\varphi_j(\cdot)\}_1^m \subset F_M$. Отображение вида $\varphi_{j_1}^{k_1}(\varphi_{j_2}^{k_2}(\ldots \varphi_{j_{m-1}}^{k_{m-1}}(\varphi_{j_m}^{k_m}(x)) \ldots)$ назовем *одночленным позиномом* с базой $\{\varphi_j\}_1^m$. Введем также обозначение для выпуклой оболочки семейства отображений

$$\operatorname{co}\{\varphi_j\}_1^m := \left\{ \sum\nolimits_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j(\cdot) \,\middle|\, \text{ все } \alpha_j \ge 0, \;\; \sum\nolimits_{j=1}^m \alpha_j = 1 \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $\{\psi_s(\cdot)\}$ — конечное число одночленных позиномов с базой $\{\varphi_j\}_1^m$. Тогда

$$\psi(\cdot) \in \operatorname{co}\{\psi_j\}_1^m \Longrightarrow \psi(\cdot) \in F_M.$$

Если $\{\varphi_j(\cdot)\} \subset \bar{F}_M$, то и $\psi(\cdot) \in \bar{F}_M$. Следовательно, в силу свойства 1 из параграфа 2

$$\{\psi^k(x_0)\}_{k=1}^\infty \to \bar{x} \in M; \tag{11}$$

здесь x_0 — произвольный начальный элемент.

Примечание. Если в определении одночленного позинома $k_i = 0$, то это означает, что φ_{j_i} в соответствующей суперпозиции отсутствует.

Пусть M_0 — непустое выпуклое замкнутое множество, $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) $\operatorname{Arg} \min\limits_{x \in M_0} f(x) =: \widetilde{M} \ne \emptyset$*;*

2) $\varphi(x) = x - \mu\nabla f(x)$ *при некотором* $\mu > 0$ *является оператором нерастяжения, т. е.* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le |x - y|$ *для всех* x *и* y *из* $\mathbb{R}^n$.

Тогда

$$\alpha \operatorname{Pr}_{M_0}[\varphi(x)] + (1-\alpha)\, x =: \ \varphi_\alpha(x) \in \bar{F}_{\widetilde{M}}, \quad \alpha \in (0,1).$$

Следовательно,

$$\{\varphi_\alpha^k(x_0)\}_{k=1}^\infty \to \bar{x} \in \widetilde{M}. \tag{12}$$

Доказательство легко получить на основе следующего факта.

Утверждение (см., например, [2], лемма 43.7, стр. 247). *Пусть выполнено условие* 1 *доказываемой теоремы. Тогда*

$$x \in \widetilde{M} \Longleftrightarrow \operatorname{Pr}_{M_0}(\varphi(x)) = x.$$

Из этого утверждения следует, что $\widetilde{M} = \operatorname{Fix} \psi(x)$, где $\psi(x) := \operatorname{Pr}_{M_0}(\varphi(x))$, т. е. $\widetilde{M}$ совпадает с множеством точек неподвижности отображения $\psi(\cdot)$. Так как операция проектирования на M_0 является нерастягивающей, то в силу условия 2 $\psi(\cdot)$ является нерастягивающим, т. е. $\psi(\cdot) \in F'_{\widetilde{M}}$. Тогда $\varphi_\alpha(\cdot) \in F_{\widetilde{M}}$ согласно свойству 2 из параграфа 2. А поскольку оператор проектирования $\operatorname{Pr}_{M_0}(\cdot)$ непрерывен и дифференцируемая выпуклая функция $f(\cdot)$ является автоматически *непрерывно* дифференцируемой, то отображение $\varphi_\alpha(\cdot)$ также непрерывно, т. е. $\varphi_\alpha(\cdot) \in \bar{F}_{\widetilde{M}}$, что и требовалось.

Следствие 1. Пусть $\{M_j\}_0^m$ *— совокупность выпуклых замкнутых множеств,*

$$\psi_\alpha(x) := \ \alpha \operatorname{Pr}_{M_0}\Big[x - \lambda \sum\nolimits_{j=1}^m \alpha_j (x - \operatorname{Pr}_{M_j}(x))\Big] + (1-\alpha)\, x,$$

$$d(x) = \sum\nolimits_{j=1}^m \alpha_j |x - \operatorname*{Pr}_{M_j}(x)|^2,$$

где все $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, $\lambda \in (0,2)$. *Тогда*

$$\psi_\alpha(\cdot) \in \bar{F}_{\widetilde{M}}, \qquad \text{где} \quad \widetilde{M} := \operatorname{Arg} \min_{x \in M_0} d(x) \ne \emptyset.$$

Следствие 2. Рассмотрим систему

$$Ax \le b, \quad Bx = d, \tag{13}$$

не обязательно совместную, причем $M_0 := \{x \mid Bx = d\} \ne \emptyset$. *Пусть* $\delta = \sum_{j=1}^m |a_j|^2$, $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \in (0,2)$. *Положим*

$$\psi_\alpha(x) := \ \alpha \operatorname{Pr}_{M_0}[\underbrace{x - (\lambda/\delta) \sum\nolimits_{j=1}^m l_j^+(x) a_j}_{\varphi(x)}] + (1-\alpha)\, x.$$

Тогда

$$\psi_\alpha(\cdot) \in \bar{F}_{\widetilde{M}}, \qquad \text{где} \ \ \widetilde{M} = \operatorname{Arg} \min_{x \in M_0} \ |(Ax-b)^+|^2.$$

Заметим, что $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \, [\underbrace{x - \lambda \frac{l_j^+(x)}{|a_j|^2} \cdot a_j}_{\varphi_j(x)}]$, где $\alpha_j = \frac{|a_j|^2}{\delta} > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$. Поскольку $\varphi_j(\cdot)$ — операторы нерастяжения, то и $\varphi(\cdot)$ является таковым. Роль функции $d(x)$, фигурирующей в следствии 1, в нашем случае играет функция $d(x) = \sum_{j=1}^m l_j^{+^2}(x)$, так что

$$\psi_\alpha(x) = \alpha \operatorname{Pr}_{M_0} (x - (\lambda/\delta)\nabla d(x)) + (1-\alpha)\, x. \tag{14}$$

Приведенный здесь оператор $\psi_\alpha(x)$ будет базовым для задания итерационного процесса применительно к неразрешимым задачам ЛП, поэтому основное его свойство мы выделим отдельной теоремой.

Теорема 3. Применительно к системе (13) *положим*

$$\varphi(x) = x - (\lambda/\delta)\, A^T (Ax - b)^+, \tag{15}$$

$$\psi_\alpha(x) = \alpha \operatorname{Pr}_{M_0} [\, \varphi(x) \,] + (1-\alpha)\, x; \tag{16}$$

где $M_0 = \{x \mid Bx = d\} \neq \emptyset$, $\lambda \in (0,2)$, $\alpha \in (0,1)$, $\delta = \sum_{j=1}^m l_j^{+^2}(x)$. *Утверждается, что оператор* $\psi_\alpha(\cdot)$ *является непрерывным фейеровским относительно множества* $\widetilde{M} = \operatorname{Arg} \min\limits_{x \in M_0} \sum_{j=1}^m l_j^{+^2}(x) \neq \emptyset$ *и, следовательно,*

$$\{\psi_\alpha^k(x_0)\}_{k=1}^\infty \to \bar{x} \in \widetilde{M}. \tag{17}$$

Если система (13) совместна, то $\bar{x}$ — ее обычное решение, если же несовместна, то $\bar{x}$ — ее квазирешение (по определению).

4. Фейеровский процесс для разрешимой задачи ЛП

Пусть

$$L: \quad \max\{(c,x) \mid Ax \le b, \ x \ge 0\} \tag{18}$$

— разрешимая задача ЛП;

$$L^*: \quad \min\{(b,u) \mid A^T u \ge c, \ u \ge 0\} \tag{19}$$

— двойственная к $\mathcal{L}$.

Задачам L и L^* поставим в соответствие систему линейных неравенств

$$S: \quad \left.\begin{array}{lr} Ax \le b, \quad x \ge 0 \quad ; & (20)_1 \\ A^T u \ge c, \quad u \ge 0 \quad ; & (20)_2 \\ (c,\ x) \ = \ (b,\ u) \quad , & (20)_3 \end{array}\right\} \tag{20}$$

называемую *симметрической*.

В теории ЛП хорошо известен следующий факт:

$$\operatorname{Arg} S = \operatorname{Arg} L \times \operatorname{Arg} L^*. \tag{21}$$

Здесь $\operatorname{Arg} S$ — множество решений системы S.

Если $\varphi_1(x) \in F_{M_1}$, где $M_1 := \operatorname{Arg}(20)_1$; $\varphi_2(u) \in F_{M_2}$, где $M_2 := \operatorname{Arg}(20)_2$; $\varphi_3(x,u) := \operatorname{Pr}_{\mathcal{H}}(x,u)$, где $\mathcal{H} = \operatorname{Arg}(20)_3$, и

$$\varphi(x,u) := \operatorname{Pr}_{\mathcal{H}}(\varphi_1^+(x), \varphi_2^+(u)), \tag{22}$$

то $\varphi(x,u) \in \bar{F}_{\widetilde{M}}$, где $\widetilde{M} = \operatorname{Arg} S$, т. е. $\varphi(x,u)$ является непрерывным фейеровским отображением относительно множества $\operatorname{Arg} L \times \operatorname{Arg} L^*$. Следовательно (в силу свойства 1, параграф 2)

$$\{\varphi^k(x_0,u_0)\}_{k=1}^{\infty} \to [\,\bar{x}, \bar{u}\,] \in \operatorname{Arg} S; \tag{23}$$

где $[\,x_0, u_0\,]$ — произвольный начальный элемент.

Что касается выбора отображений $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$, то это можно делать разными способами, в частности, *базовым* способом, изложенными в параграфе 3, а именно:

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi_1(x) & = & x - (\lambda\,/\,\delta_1)\,\sum_{j=1}^m l_j^+(x)a_j, \\ \varphi_2(u) & = & u - (\lambda\,/\,\delta_2)\,\sum_{i=1}^m h_i^+(u)h_i, \\ \varphi_3(x,u) & = & [\,x,u\,]^T - \frac{(c,x)-(b,u)}{|c|^2+|b|^2}\,[\,c,-b\,]^T; \end{array}\right\} \tag{24}$$

здесь $\{h_i\}$ — столбцы матрицы A, $h_i(u) = c_i - (h_i, u)$, $\delta_1 = \sum_{j=1}^m |a_j|^2$, $\delta_2 = \sum_{i=1}^n |h_i|^2$, $\lambda \in (0,2)$.

Заметим, что вид отображений $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ будет меняться в зависимости от того, в какой форме записана исходная задача линейного программирования. Если, например, задача L задана в канонической форме

$$\min\{(c,x)\,|\,Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{25}$$

то двойственная к ней будет иметь вид

$$\max\{(b,u)\,|\,A^T u \leq c\}, \tag{26}$$

а отображения $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ и $\varphi(x,u)$ соответственно примут вид:

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi_1(x) & = & x - (\lambda\,/\,\delta_1)\,\sum_{j=1}^m l_j(x)a_j, \\ \varphi_2(u) & = & u - (\lambda\,/\,\delta_2)\,\sum_{i=1}^n [\,(h_i,u) - c_i\,]^+ h_i, \\ \varphi_3(x,u) & = & \operatorname{Pr}_{\mathcal{H}}(\varphi_1(x), \varphi_2^+(u)). \end{array}\right\} \tag{27}$$

Вид $\varphi_3(x,u)$ формулы проектирования на $\mathcal{H}$ сохраняется.

В связи с тем, что основные ограничения в (25) записаны в форме системы линейных уравнений $Ax = b$, пусть с множеством решений $\mathcal{L}$, то $\varphi_1(\cdot)$ можно сконструировать, исходя из операции проектирования на $\mathcal{L}$, имеющей, как уже отмечалось, вид

$$\operatorname{Pr}_{\mathcal{L}}(x) = x - A^T(AA^T)^{-1}\,(Ax - b) \tag{28}$$

(в предположении, что $\operatorname{rank} A = n$). Если положить $\varphi_1(x) = \operatorname{Pr}_{\mathcal{L}}(x)$, заключительный итерационный оператор $\varphi(x,u)$ будет иметь ту же форму, что и в (22).

Применительно к задаче (25) задание отображения $\varphi(x,u)$ в форме

$$\varphi(x,u,v) := \ \mathrm{Pr}_{M_0}(x,u^+,v^+), \tag{29}$$

где M_0 — множество решений системы

$$Ax=b, \qquad A^Tu+v=c, \qquad (c,x)=(b,u), \tag{30}$$

рассматривалось в работе [4], посвященной численным экспериментам решения задач ЛП большой размерности на многопроцессорных вычислительных машинах.

5. Несобственные (неразрешимые) задачи ЛП 1-го рода

Если исходная задача ЛП неразрешима, т. е. по принятой терминологии является *несобственной*, то ее соответствующая симметрическая система S является несовместной (верно и обратное). Для этой задачи можно ввести понятие *квазирешения* через определение *квазирешения* системы S. Поясним это для случая задания задачи ЛП в форме

$$L: \quad \max\{(c,x)\,|\,Ax\le b\}. \tag{31}$$

Двойственной к ней будет

$$L^*: \quad \min\{(b,u)\,|\,A^Tu=c,\ u\ge 0\}. \tag{32}$$

Симметрической системой S является

$$\left.\begin{aligned} Ax\le b, \qquad A^Tu=c, \qquad u\ge 0,\\ (c,x)=(b,u). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Если L — несобственная задача ЛП 1-го рода, т. е.

$$M := \ \{x\,|\,Ax\le b\}=\emptyset, \qquad M^* := \ \{u\,|\,A^Tu=c,\ u\ge 0\}\ne\emptyset,$$

то после введения обозначений

$$M_0=\left\{\begin{bmatrix} x\\ u\end{bmatrix}\,|\,A^Tu=c,\ (c,x)=(b,u)\right\}, \quad d(x,u)=|(Ax-b)^+|^2+|(-u)^+|^2,$$

можно сформировать задачу

$$\min\{d(x,u)\,|\,u\in M_0\}, \tag{34}$$

которая является аппроксимационной для несовместной системы (33). Если $[\bar{x},\bar{u}]^T\in$ $\mathrm{Arg}\,(34)$, то $\bar{x}$ будем называть *квазирешением* системы (33), а вместе с тем и квазирешением задачи (31). Если последняя разрешима, то $\bar{x}$ — обычное ее решение. Для (34) можно записать фейеровское отображение относительно множества $\mathrm{Arg}\,(34)$ по стандарту из параграфа 3, но применительно к системе (33):

$$\varphi(x,u)=\begin{bmatrix} x\\ u\end{bmatrix}-(\lambda\,/\,2\,\delta)\ \triangledown\, d(x,u), \quad \psi(x,u)=\mathrm{Pr}_{M_0}\varphi(x,u),$$

$$\psi_\alpha(x,u) = (1-\alpha)\,\psi(x,u) + \alpha \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \tag{35}$$

где $\lambda \in (0,2)$, $\delta = \sum_{j=1}^{m} |a_j|^2 + m$, $\alpha \in (0,1)$.

В соответствии с теоремой 2 $\psi_\alpha(x,u)$ является $\widetilde{M}$-фейеровским непрерывным отображением относительно $\widetilde{M} = \mathrm{Arg}\,(34)$. Следовательно, итерационный процесс вида $\{\psi_\alpha^k(x_0,u_0)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторому вектору $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix}$, при этом по определению $\bar{x}$ — *квазирешение* (31), $\bar{u}$ — *квазирешение* (32).

Операция $\mathrm{Pr}_{M_0}(\cdot)$, фигурирующая в определении $\psi(x,u)$ и входящая, следовательно, в формулу (35), может быть записана согласно соотношению (28) с заменой в нем матрицы A на матрицу $\bar{A} := \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ c^T & -b^T \end{bmatrix}$, а вектора b — на вектор $\begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. Несобственные (неразрешимые) задачи ЛП 2-го рода

Рассмотрение данного вопроса отнесем к задачам (31)–(33). Ситуация несобственности 2-го рода соответствует тому, что $M \neq \emptyset$, $M^* = \emptyset$, где смысл символов M и M^* тот же, что и в параграфе 5. Систему (33) разобьем на две части:

$$A^T u = c, \qquad u \geq 0, \qquad v \geq 0; \tag{36}$$

и

$$Ax + v = b, \qquad (c,x) = (b,u). \tag{37}$$

Здесь система $Ax \leq b$ заменена на $Ax + v = b$, $v \geq 0$ — обычная перезапись системы неравенств. Положим $d(x,u,v) = |A^T u - c|^2 + |(-u)^+|^2 + |(-v)^+|^2$, M_0 — множество решений системы (37). В силу предположения о непустоте M имеем: $M_0 \neq \emptyset$. В согласии с базовой конструкцией фейеровского отображения $\psi_\alpha(\cdot)$ из параграфа 3, реализованного для НЗ ЛП 1-го рода в параграфе 5, соответствующим отображением для рассматриваемого случая НЗ ЛП 2-го рода будет отображение

$$\psi_\alpha(x,u,v) := \ \mathrm{Pr}_{M_0}\left(\begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix} - (\lambda\,/\,2\delta)\ \bigtriangledown d(x,u,v) \right); \tag{38}$$

здесь $\lambda \in (0,2)$, $\delta = \sum_{i=1}^{n} |h_i|^2 + 2m$.

Итерационный процесс, порожденный отображением (38), будет сходиться к некоторому вектору $[\,\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}\,]$, при этом $\bar{x}$ — квазирешение задачи (31), $\bar{u}$ — квазирешение задачи (32).

7. Несобственные задачи ЛП 3-го рода

В предыдущих параграфах 5 и 6 мы апеллировали к несовместности симметрической системы S, поставленной в соответствие исходной задаче ЛП, которая предполагалась либо НЗ ЛП 1-го рода, либо 2-го. Существо аппроксимационного подхода, отнесенного к системе S, заключалось в формировании ее совместной подсистемы из уравнений и квадратичной функции невязки $d(x)$ для оставшихся ограничений этой системы. То, что эта операция неоднозначна, является весьма полезным обстоятельством, так как во всяком конкретном случае, т. е. в случае конкретного формата задачи (например, формата транспортной задачи, блочного формата и т. д.), указанная операция выделения подсистемы может быть увязана с потребностью простой и эффективной численной реализации итерационного шага, порождаемого итерационным оператором. К этому следует еще добавить, что построение итогового фейеровского итерационного оператора будет зависеть от конкретного вида исходной задачи ЛП. Всякий раз при построении нужного фейеровского отображения необходимо все это учитывать.

Для рассмотрения НЗ ЛП 3-го рода возьмем задачу ЛП, ей двойственную, и систему S в формате (18)–(20) из параграфа 4.

Так как итоговое итерационное отображение $\psi_\alpha(\cdot)$ формируется из фрагментов $\varphi(x)$, $\psi(x) = \mathrm{Pr}_M\, \varphi(x)$, а те в свою очередь — из M, $d(\cdot)$ и δ, то, формируя аналоги отображений $\psi_\alpha(\cdot)$ применительно к системе (20), мы в рассматриваемых ниже вариантах будет приводить лишь вид множества M, функции невязки $d(\cdot)$ и числа δ.

Вариант 1. $M_1 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \mid (c,x) = (b,u) \right\}$, $\;d_1(x,u) = |(Ax-b)^+|^2 + |(c-A^T u)^+|^2 + |(-x)^+|^2 + |(-u)^+|^2$, $\;\delta_1 = \sum_{j=1}^m |a_j|^2 + \sum_{i=1}^n |h_i|^2 + m + n$.

Вариант 2. $M_2 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix} \mid A^T u - v = c,\ (c,x) = (b,u) \right\}$, $\;d_2(x,u,v) = |(Ax-b)^+|^2 + |(-x)^+|^2 + |(-u)^+|^2 + |(-v)^+|^2$, $\;\delta_2 = \sum_{j=1}^m |a_j|^2 + m + 2n$.

Вариант 3. $M_3 := \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix} \mid Ax - w = b,\ (c,x) = (b,u) \right\}$, $\;d_3(x,u,w) = |(c-A^T u)^+|^2 + |(-x)^+|^2 + |(-u)^+|^2 + |(-w)^+|^2$, $\;\delta_3 = \sum_{j=1}^n |h_i| + n + 2m$.

Вариант 4. $M_4 := \mathbb{R}^n$, $\;d_4(x,u) = |(Ax-b)^+|^2 + |(c-A^T u)^+|^2 + |(-x)^+|^2 + |(-u)^+|^2$, $\delta_4 = \sum_{j=1}^m |a_j|^2 + \sum_{i=1}^n |h_i|^2 + m + n$.

Последний вариант годится как для разрешимой задачи, так и для неразрешимой любого рода неразрешимости (1-го, 2-го или 3-го).

8. Распределенные вычисления для блочных систем

Как уже отмечалось, решение задачи ЛП сводится к решению системы линейных неравенств $\mathcal{S}$ с матрицей коэффициентов, имеющей блочную структуру. Если в качестве исходной взять задачу

$$\max\{(c,x) \mid Ax \le b, x \ge 0\},$$

то матрицей коэффициентов перед переменными x_i и y_j будет

$$\bar{A} := \begin{bmatrix} \boxed{\;A\;} & \\ & \boxed{\;-A^T\;} \\ \hline c^T & -b^T \end{bmatrix}.$$

Построение отображения (22) из параграфа 4 было основана на декомпозиционном принципе, учитывающем блочную структуру матрицы $\bar{A}$. Ниже этот вопрос рассмотрим подробнее применительно к канонической системе линейных уравнений и неравенств

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{39}$$

при разных вариантах блочности матрицы A (в скобках заметим, что символ A в данном контексте не следует связывать с символом A в предыдущих записях).

Остановимся предварительно на некоторых фактах из теории фейеровских отображений с несовпадающими пространствами образов [6].

Пусть $x_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ i = 1, \ldots, n;\ I_j \subset \{1, \ldots, n\},\ j = 1, \ldots, m,\ \bigcup\limits_{(j)} I_j = \{1, \ldots, n\}$. Для заданного набора непустых выпуклых замкнутых множеств $M_j \subset \prod\limits_{i \in I_j} \mathbb{R}^{n_i} =: \ \mathbb{X}_j$ выстроим совокупность непрерывных фейеровских отображений $\varphi_j(x_i \,|\, i \in I_j) \in F_{M_j},\ j = 1, \ldots, m$, и введем матрицу $\Xi = [\xi_{ji}]_{1,1}^{m,n}$, в которой

$$\xi_{ji} = \begin{cases} x_i, & i \notin I_j, \\ x_i^j, & i \in I_j, \end{cases}$$

где x_i^j — алгебраический след вектора $\varphi_j(\cdot)$ в $\mathbb{R}^{n_i}$ — как подпространстве пространства $\mathbb{X}_j$. Положим

$$\bar{\varphi}_j(x_1, \ldots, x_n) \ := \ [\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn}], \tag{40}$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \ := \ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \bar{\varphi}_j(x_1, \ldots, x_n), \text{ где } \alpha_j > 0, \ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1. \tag{41}$$

Определение. Вектор $\tilde{x} := [\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n] \in \mathbb{X} := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}^{n_i}$ назовем согласованной неподвижной точкой для $\{\varphi_j(\cdot)\}_1^m$, если $\varphi_j(\tilde{x}_i \,|\, i \in I_j) = [\,\tilde{x}_i \,|\, i \in I_j\,],\ \ j = 1, \ldots, m.$

Обозначим множество согласованных неподвижных точек через M.

Теорема 4. Справедливы утверждения:

1. *Множество неподвижных точек отображения* (41) *совпадает с* M;
2. $\varphi(\cdot) \in F_M$, *т. е.* $\varphi(\cdot)$ *является* M*-фейеровским*;
3. *Если отображения* $\{\varphi_j(\cdot)\}_1^m$ *непрерывны, то отображение* $\varphi(\cdot)$ *непрерывно, при этом*

$$\{\varphi^k(x_1^0, \ldots, x_n^0)\}_{k=1}^{+\infty} \longrightarrow \tilde{x} \in M;$$

здесь $[x_1^0, \ldots, x_n^0]$ — *произвольный начальный вектор из* $\mathbb{X}$.

Замечание. Отображение $\varphi(\cdot)$ может быть преобразовано к виду

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = [\ \ldots, \ \underbrace{\sum_{j: i \in I_j} \alpha_j x_i^j + (\sum_{j: i \notin I_j} \alpha_j) x_i,}_{i\text{-я координата}} \quad \ldots\ ]. \tag{42}$$

Применим представленный выше подход к разработке распределенных методов решения системы линейных уравнений и неравенств (39) в предположении полурегулярной блочности матрицы A. Последнее будет означать, что матрица разбита на ряд горизонтальных и вертикальных полос

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

так, что среди образовавшихся подматриц $A_{j\,i}$ достаточно много нулевых. Вместе с тем структура взаимного расположения ненулевых подматриц пока не ограничивается. Для каждой из горизонтальных полос определим свое индексное множество $I_j := \{i : \ A_{j\,i} \neq 0\}$, где $j = 1, \dots, m$; при этом $I_j \subseteq \{1, \dots, n\}$, $\bigcup\limits_{(j)} I_j = \{1, \dots, n\}$. Тем самым система (39) может быть представлена набором своих подсистем:

$$\sum_{(i \in I_j)} A_{j\,i} x^i = b^j, \ j = 1, \dots, m, \quad x = [x^1, \dots, x^n]^T \geq 0. \tag{43}$$

Пусть $M_j = \{ \ (x^i \,|\, i \in I_j) \geq 0 : \ \sum\limits_{(i \in I_j)} A_{j\,i} x^i = b^j \ \}, \ \ j = 1, \dots, m, \ \ M = \bigcap\limits_{(j)} M_j \neq \emptyset$, где $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \ \ i = 1, \dots, n$, M — множество решений системы (43). Выберем набор непрерывных фейеровских отображений $\varphi_j(x_i \,|\, i \in I_j) \in F_{M_j}$, где $j = 1, \dots, m$, и сформируем оператор, аналогичный оператору (42). Порождаемый этим отображением итерационный процесс будет обладать свойством:

$$\{\varphi^k(x_1^0, \dots, x_n^0)\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \tilde{x} \in M;$$

где $[x_1^0, \dots, x_n^0]$ — произвольный начальный вектор из $\mathbb{X}$.

Рассмотрим ряд конкретных классов блочных матриц.

Вариант 1. Пусть матрица A разбита на горизонтальные подматрицы

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\qquad\qquad A_1 \qquad\qquad} \\ \vdots \\ \boxed{\qquad\qquad A_m \qquad\qquad} \end{bmatrix}, \tag{44}$$

что соответствует разбиению системы (39) на подсистемы

$$A_j\, x = b^j, \qquad x \geq 0, \qquad j = 1, \dots, m. \tag{45}$$

Пусть $M_j = \{x \,|\, A_j\, x = b^j\}$. Тогда

$$\varphi(x) = \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \operatorname{Pr}_{M_j}(x) \right]^+ \in F_M,$$

где $M = \{x \geq 0 \,|\, Ax = b\}$, все $\alpha_j > 0$, $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$. На самом деле отображение $\varphi(x)$ непрерывно, поэтому $\varphi(\cdot) \in \bar{F}_M$, что дает

$$\{\varphi^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty} \to \bar{x} \in M.$$

Целесообразность разбиения системы (39) на подсистемы можно связать с проблемой преодоления трудностей, связанных с обращением матрицы AA^T (см. формулу проектирования (29) из параграфа 4) на $\mathcal{L} = \{x \,|\, Ax = b\}$). При разбиении системы (39) на подсистемы (45) нужно будет обращать матрицы $A_j A_j^T$ меньших размеров. К тому же само разбиение, учитывающее структуру матрицы A, может быть нацелено именно на эффективность указанных обращений, которые можно выполнять одновременно и независимо друг от друга, например, на разных процессорах вычислительной сети. Последнее замечание справедливо и по отношению ко всем последующим вариантам.

Вариант 2. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\boxed{\qquad\qquad A_0 \qquad\qquad}} \end{bmatrix},$$

тогда система (39) имеет вид

$$\left. \begin{array}{l} A_i\, x^i = b^{\,i}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ A_0\, x = b^{\,0}, \quad x^T = [x^1, \ldots, x^n] \geq 0 \end{array} \right\} \tag{46}$$

Если подсистемам $A_i\, x^i = b^{\,i}$, $i = 1, \ldots, n$, $A_0\, x = b^{\,0}$ поставить в соответствие отображения $\varphi_i(x^i) \in \bar{F}_{M_i}$, $i = 1, \ldots, n$, и $\varphi_0(x) \in \bar{F}_{M_0}$, где $M_i := \{x^i \,|\, A_i x^i = b^i\}$, $M_0 = \{x \,|\, A_0 x = b^0\}$, то

$$\varphi(x) := \varphi_0(\varphi_1(x^1), \ldots, \varphi_n(x^n))^+ \in \bar{F}_M,$$

причем выбор отображений $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ может осуществляться разными способами, например, $\varphi_i(x^i) = \mathrm{Pr}_{M_i}(x^i)$, $i = 1, \ldots, n$; $\varphi_0(x) = \mathrm{Pr}_{M_0}(x)$. Подчеркнем, что компоненты $\varphi_i(x^i)$, входящие в качестве аргументов в $\varphi_0(\cdot)$, можно вычислять одновременно и независимо друг от друга.

Вариант 3. Пусть теперь матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & & \boxed{B_1} \\ & \boxed{A_2} & & & \boxed{B_2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \boxed{A_m} & \boxed{B_m} \end{bmatrix}.$$

Приведем отвечающий ей вид системы (43):

$$\left. \begin{array}{c} A_i\, x^i + B_i\, x^0 = b^{\,i}, \quad i = 1, \ldots, m, \\ x = [\, x^1, \ldots, x^m, x^0\,] \geq 0. \end{array} \right\} \tag{47}$$

Отдельным ее подсистемам $A_i\, x^i + B_i\, x^0 = b^i$ поставим в соответствие частные отображения

$$\varphi_i(x^i, x^0) \in \bar{F}_{M_i}, \ i = 1, \dots, m,$$

где $M_i = \{[\, x^i, x^0\,] \,|\, A_i\, x^i + B_i\, x^0 = b^i\}$. Заметим, что векторные пространства, в которых определены эти отображения, не совпадают.

Обозначим через $\bar{x}^i$ алгебраический след вектора $\varphi_i(x^i, x^0)$ в $\mathbb{R}^{n_i}$ — подпространстве пространства $X = (\prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^{n_i}) \times \mathbb{R}^{n_0}$ исходной переменной x, а через $\bar{x}^{0,i}$ — аналогичный след этого вектора в $\mathbb{R}^{n_0}$ (здесь n_i — размерность вектора x^i). Тогда отображение

$$\varphi(x) = \frac{1}{m} \left[\bar{x}^1 + (m-1)x^1, \ \dots, \ \bar{x}^m + (m-1)x^m, \ \sum_{i=1}^{m} \bar{x}^{0,i} \right]^+ \tag{48}$$

порождает сходящийся процесс [3] вида

$$\{\varphi^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty} \to \bar{x} \in M. \tag{49}$$

Вариант 4. Пусть матрица A имеет блочную структуру вида

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & & \boxed{B_1} \\ & \boxed{A_2} & & & \boxed{B_2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \boxed{A_m} & \boxed{B_m} \\ \multicolumn{4}{c}{\boxed{\quad\quad A_0 \quad\quad}} & \boxed{B_0} \end{bmatrix},$$

что позволяет записать систему (39) следующим образом

$$\left. \begin{array}{l} A_i\, x^i + B_i\, x^0 = b^i, \quad i = 1, \dots, m, \\ A_0\, y + B_0\, x^0 = b^0, \\ x = [\, \underbrace{x^1, \dots, x^m}_{y}, x^0\,]^T \geq 0. \end{array} \right\}. \tag{50}$$

Тем самым мы имеем здесь комбинацию двух рассмотренных выше случаев 2 и 3.

Пусть $\varphi_0(x) \in \bar{F}_{M_0}$, где $M_0 = \{x \,|\, A_0\, y + B_0\, x^0 = b^0\}$, и $\varphi_i(x^i, x^0) \in \bar{F}_{M_i}$, где $M_i := \{x \,|\, A_i\, x^i + B_i\, x^0 = b^i\}$, $i = 1, \dots, m$; $\bar{x}^i$ и $\bar{x}^{0,i}$ имеют тот же смысл, что и в варианте 3. По аналогии с предыдущим составим отображение

$$\varphi(x) = \varphi_0^+ \left(\frac{\bar{x}_1 + (m-1)x^1}{m}, \ \dots, \ \frac{\bar{x}_m + (m-1)x^m}{m}, \ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}^{0,i} \right). \tag{51}$$

Последнее генерирует сходящийся процесс

$$\{\varphi^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty} \to \bar{x} \in M,$$

здесь M — множество решений системы (50).

Таблица 1

Параллельный счет для блочной системы 1

N	Время счета T_N	Ускорение абсолютное	Эффективность	
			абсолютная	относительная
10	2836	9.26	0.93	1.00
15	2023	12.98	0.86	0.93
20	1774	14.80	0.74	0.80
30	1522	17.26	0.57	0.62
50	1631	16.10	0.32	0.35
60	1769	14.85	0.25	0.27

Таблица 2

Параллельный счет для блочной системы 2

N	Время счета T_N	Ускорение абсолютное	Эффективность	
			абсолютная	относительная
20	3100	17.06	0.85	1.00
35	2405	21.99	0.73	0.86
40	2241	23.60	0.59	0.69
60	2208	23.95	0.40	0.47

9. Численный эксперимент

Численный эксперимент с целью определить показатели *максимального ускорения* и *эффективности*, достигаемые на задачах достаточно большой размерности при распараллеливании обсуждаемых алгоритмов, был проведен на МВС-100 на ряде блочных систем большой размерности с плотным заполнением блоков матрицы ограничений. В табл. 1, 2 размещены результаты, полученные для двух систем с блочной-диагональный структурой расположения ненулевых коэффициентов при наличии вертикального окаймления. Первая из систем состояла из 300 блоков размерности 100×50, вторая — из 600 аналогичных блоков. В таблицах приведены данные о числе используемых процессоров N (1-я колонка), времени T_N, затраченном на выполнение 10000 шагов итерационного алгоритма (2-я колонка, единицы измерения условные), а также достигнутых абсолютном ускорении и эффективности (3-я и 4-я колонки) и относительной эффективности (5-я колонка). Абсолютные ускорение $S(N)$ и эффективность $E(N)$ определялись по формулам

$$S(N) = \frac{T_1}{T_N}, \quad E(N) = \frac{T_1}{NT_N}$$

на основе расчетного времени T_1 выполнения необходимого объема арифметических операций на одном процессоре (реальные вычисления не проводились, так как весь объем исходных данных задачи невозможно разместить в локальной памяти одного процессора).

Таблица 3

Параллельный счет для циклической системы 1

N	Время счета T_N	Ускорение абсолютное	Эффективность	
			абсолютная	относительная
10	1560	7.90	0.79	1.00
15	1044	11.81	0.78	0.99
20	926	13.35	0.66	0.84
30	856	14.40	0.48	0.61
50	366	21.77	0.43	0.55
60	470	26.21	0.43	0.55

Таблица 4

Параллельный счет для циклической системы 2

N	Время счета T_N	Ускорение абсолютное	Эффективность	
			абсолютная	относительная
20	2410	18.79	0.94	1.00
35	1204	37.61	1.25	1.33
40	1148	39.44	0.99	1.05
60	892	50.76	0.85	0.90

Относительные показатели эффективности измерялись на базе времени, отвечающему минимальному числу элементов МКМД-сети, на которых возможно реальное исполнение программы. Это значит, что относительная эффективность $E_m(N)$ считалась как отношение

$$E_m(N) = \frac{mT_m}{NT_N},$$

где m — минимально допустимое для решавшейся задачи число процессоров, N — число процессоров, для которых определяется эффективность, T_m — время выполнения программы на минимально допустимом числе процессоров, T_N — время выполнения программы на N процессорах.

В табл. 3, 4 размещены результаты, полученные для двух систем с матрицами циклической связности. Системы также состояли: первая из 300 блоков размерности 100×50, вторая — из 600 аналогичных блоков. В таблицах приведены данные о числе используемых процессоров N (1-я колонка), времени T_N, затраченном на выполнение 10000 шагов итерационного алгоритма (2-я колонка, единицы измерения условные), а также достигнутых абсолютном ускорении и эффективности (3-я и 4-я колонки) и относительной эффективности (5-я колонка). Абсолютные ускорение и эффективность также определялись на основе расчетного времени выполнения необходимого объема арифметических операций на одном процессоре (реальные вычисления не проводились, так как исходные данные задачи невозможно разместить в локальной памяти одного процессора). Относительные показатели измерялись на базе времени, отвечающем минимальному числу загруженных элементов сети. Несколько завышенные показатели эффективности в последней задаче объясняются спецификой физической топологии используемой сети.

В целом на предложенных тестовых задачах новые алгоритмы показали себя достаточно эффективными для того, чтобы продолжить исследования в этом направлении.

Дополнительные результаты по вычислительным экспериментам на многопроцессорной вычислительной машине МВС–100 с применением методов распараллеливания можно найти в [4, 5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Еремин И.И., Вл.Д.Мазуров.* Нестационарные процессы математического программирования. –М.: Наука, 1979.

[2] *Еремин И.И.* Теория линейной оптимизации. –Екатеринбург: УрО РАН. 1999.

[3] *Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н.* Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. –М.: Наука, 1983.

[4] *Бердникова Л.Д., Попов Л.Д.* О применении декомпозиции при реализации фейеровских методов решения больших систем линейных неравенств на МВС–100 // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. –Екатеринбург: УрО РАН. 2000. No 4. С.51 – 62.

[5] *Попов Л.Д.* Вопросы реализации методов ЛП в транспьютерных сетях // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. –Екатеринбург: УрО РАН. 1995. No 1. С.148 – 156.

[6] *Еремин И.И.* Синтез фейеровских отображений с несовпадающими пространствами их образов // ДАН. 2001. т. 378. No 1. С.11 – 13.