Параллельный алгоритм решения задач линейного программирования на основе фейеровских отображений*

Н.Ю. Цымблер, Л.Б. Соколинский

В работе предлагается алгоритм для решения задач линейного программирования большой размерности, ориентированный на многопроцессорные системы с массовым параллелизмом. Данный алгоритм базируется на S-технологии [1], в которой решение задачи линейного программирования L: $\max\{(\mathbf{c},\mathbf{x}) \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ получается в результате выполнения итерационного процесса, в ходе которого циклически вычисляются значения отображений φ_1, φ_2, φ_3:

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\lambda/\delta_1)\sum_{i=1}^{m} l_i^+(\mathbf{x})\mathbf{a}_i, \text{ где } \delta_1 = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{a}_i\|^2 \text{ и } l_i^+(\mathbf{x}) = \max\{(\mathbf{a}_i,\mathbf{x}) - b_i, 0\};$$

$$\varphi_2(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + (\lambda/\delta_2)\sum_{j=1}^{n} h_j^+(\mathbf{u})\mathbf{a}^j, \text{ где } \delta_2 = \sum_{j=1}^{n} \left\|\mathbf{a}^j\right\|^2 \text{ и } h_j^+(\mathbf{u}) = \max\left\{c_j - (\mathbf{a}^j,\mathbf{u}), 0\right\};$$

$$\varphi_3(\mathbf{x},\mathbf{u}) = [\mathbf{x},\mathbf{u}] - \frac{(\mathbf{c},\mathbf{x}) - (\mathbf{b},\mathbf{u})}{\|\mathbf{c}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2}[\mathbf{c},-\mathbf{b}].$$

Построим параллельный алгоритм. Пусть E_i $(i = 1,\ldots,r)$ - подбазисы канонического базиса $\mathbb{R}^n$. Любой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ разложим в сумму $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_r$, где $\mathbf{x}_i \in L_i = \operatorname{Lin} E_i$. Определим совокупность отображений в $\mathbb{R}^n$ $\varphi_{1i}(\mathbf{x}) = \pi_{1i}(\varphi_1(\mathbf{x})) + \sum_{l \ne i} \pi_{1l}(\mathbf{x})$ $(i = 1,\ldots,r)$. Здесь π_{1i} – оператор, выполняющий ортогональное проектирование точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ на подпространство L_i.

Выполнив аналогичные построения для двойственной переменной $\mathbf{u}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ в предположении, что канонический базис этого пространства разбит на s подбазисов, определим совокупность отображений в $\mathbb{R}^m$ $\varphi_{2j}(\mathbf{u}) = \pi_{2j}(\varphi_2(\mathbf{u})) + \sum_{l \ne j} \pi_{2l}(\mathbf{u})$ $(j = 1,\ldots,s)$.

Построим итерационный процесс вычисления решения исходной задачи как циклическое выполнение следующих шагов при начальном приближении $[\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_0]$:

1) $\mathbf{x}_{ti} = \varphi_{1i}^k(\mathbf{x}_t)$ $(i = 1,\ldots,r)$;

2) $\mathbf{u}_{tj} = \varphi_{2j}^k(\mathbf{u}_t)$ $(j = 1,\ldots,s)$;

3) $\mathbf{x}'_t = \sum_{i=1}^{r} \pi_{1i}(\mathbf{x}_{ti})$; $\mathbf{u}'_t = \sum_{j=1}^{s} \pi_{2j}(\mathbf{u}_{tj})$;

4) $[\mathbf{x}_{t+1},\mathbf{u}_{t+1}] = \varphi_3(\mathbf{x}'_t,\mathbf{u}'_t)$.

Значение k является параметром алгоритма. Вычисления каждого из значений $\mathbf{x}_{t1},\ldots,\mathbf{x}_{tr}$ и $\mathbf{u}_{t1},\ldots,\mathbf{u}_{ts}$ независимы друг от друга. Это позволяет при выполнении шагов 1 и 2 организовать $r + s$ независимых процессов, не требующих между собой обменов данными.

Литература

1. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. –Екатеринбург: УрО РАН, 2005. -210 с.

* Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00380 и ФАНИ НШ-5595.2006.1.