

МЕТОДЫ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ ФЕЙЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

И. И. Еремин

Институт математики и механики УрО РАН, e-mail: ermii@imm.uran.ru

1. Метод декомпозиции ограничений. Один из способов распараллеливания фейеровских процессов применительно к системе выпуклых неравенств

$$f_j(z) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (1)$$

с множеством решений $M \subset \mathbb{R}^n$ неоднократно публиковался (см., например, [1, гл. I, § 5]). Этот способ заключается в следующем. Разбиваем систему (1) на подсистемы

$$F_s(z) \leq 0, \quad s = 1, \dots, k, \quad (2)$$

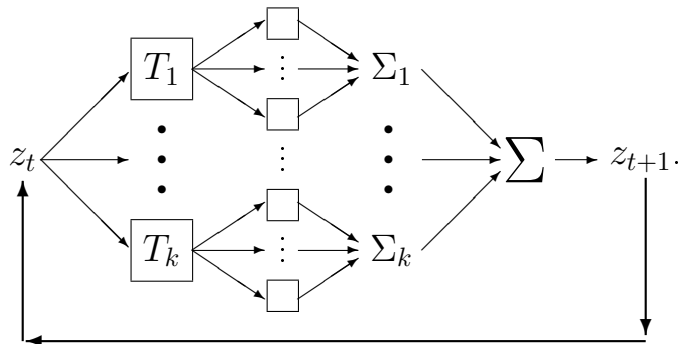
для каждой из которых строится (одним из многочисленных приемов [2]) непрерывный оператор $T_s(z) \in F_{M_s}$ (F_{M_s} — M_s -фейеровский оператор, где $M_s = \{z \mid F_s(z) \leq 0\}$). Из $\{T_s(z)\}_{s=1}^k$ формируем интегрированный оператор

$$T(z) = \sum_{s=1}^k \alpha_s T_s(z), \quad \alpha_s > 0, \quad \sum_{s=1}^k \alpha_s = 1. \quad (3)$$

Справедливо утверждение:

$$T(z) \in F_M, \text{ при этом } \{T^t(z_0)\}_{t=1}^{+\infty} \rightarrow z' \in M. \quad (4)$$

Подсистемы (2) могут допускать дальнейшие разбиения. Приведем схему алгоритма:



Примечание. Если система ограничений (2) содержит требование $z \geq 0$, то достаточно соотношение (3) заменить на

$$T(z) = \left(\sum_{s=1}^k \alpha_s T_s(z) \right)^+,$$

где “+” над вектором, стоящем в общей скобке, означает положительную его срезку (т.е. замену отрицательных координат этого вектора на нули).

2. Метод покоординатного спуска. Способ, который мы приводим здесь, состоит в расщеплении переменного вектора $z \in \mathbb{R}^n$ на подвекторы, пусть, для простоты, на x и y : $z = [x, y]$. Пусть $Q(z)$ — произвольный фейеровский оператор относительно множества M (см. п. 1). Если $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, то определим Q_1 как алгебраическую проекцию Q на \mathbb{R}^{n_1} и Q_2 как алгебраическую проекцию Q на \mathbb{R}^{n_2} . Понятно, что Q_1 и Q_2 зависят от x и y :

$$Q_1 = Q_1(x | y), \quad Q_2 = Q_2(y | x).$$

Запись $(x | y)$ и $(y | x)$ означает в первом случае: x — активная переменная, y — пассивная переменная (параметр); во втором: y — активная переменная, x — пассивная переменная (параметр). Построим процесс: если x_k и y_k вычислены, то полагаем

$$x_{k+1} = Q_1^{N_1}(x_k | y_k), \quad y_{k+1} = Q_2^{N_2}(y_k | x_k),$$

где N_1 и N_2 — натуральные числа, задающие глубину итерирования операторами Q_1 и Q_2 . При определенных условиях справедлива сходимость:

$$[x_k, y_k]_{k=0}^{+\infty} \rightarrow \tilde{z} \in M \quad (= [\tilde{x}, \tilde{y}] \in M).$$

3. Пример. Пусть

$$l_j(z) := (a_j, z) - b_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (5)$$

— система линейных относительно $z \in \mathbb{R}^n$ неравенств с множеством решений M (возможно, $M = \emptyset$), $z = [x, y] \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ ($= \mathbb{R}^n$). Построим отображение

$$T(z) := z - \lambda \delta^{-1} \sum_{j=1}^m l_j^+(z) a_j, \quad (6)$$

где $\lambda \in (0, 2)$, $\delta = \sum_{j=1}^m \|a_j\|^2$. Оно является фейеровским относительно $\widetilde{M} :=$

$\text{Arg min}_{(z)} \sum_{j=1}^m l_j^{+2}(z)$ (см. [3, стр. 244, лемма 43.4]).

Образуем расщепление отображения (5) по переменной $z = [x, y]$:

$$\begin{aligned} T_1(x | y) &= x - \lambda \delta^{-1} \sum_{(j)} l_j^+(x | y) a_j^x, \\ T_2(y | x) &= y - \lambda \delta^{-1} \sum_{(j)} l_j^+(y | x) a_j^y, \end{aligned} \quad (7)$$

где $[a_j^x, a_j^y] = a_j$, $j = 1, \dots, m$. Выпишем для (6) итерационные процессы: начальные x_0 и y_0 произвольны; если x_k и y_k уже вычислены, то полагаем:

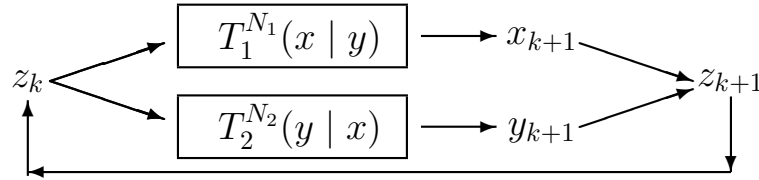
$$x_{k+1} = T_1^{N_1}(x_k | y_k), \quad y_{k+1} = T_2^{N_2}(y_k | x_k). \quad (8)$$

Уточним смысл процесса (7). В первом соотношении x_k — начальный элемент процесса для постоянного y_k , во втором соотношении y_k — начальный элемент для процесса при постоянном x_k . Что касается натуральных чисел N_1 и N_2 , то их смысл разъяснен в п. 2.

Справедлива сходимость:

$$\{z_k = [x_k, y_k]\}_k \rightarrow z' \in \widetilde{M}.$$

Приведем схему данного процесса:



Примечание. В п.п. 2 и 3 расщепление операторов $Q(\cdot)$ и $T(\cdot)$ согласно разбиению переменной z может быть произвольным (в смысле разбиения z на конечное число подвекторов). Во избежания громоздкости выкладок общая схема не приводится.

4. Смешанный случай распараллеливания для задачи линейного программирования (ЛП). Запишем задачу ЛП в форме

$$L : \max\{(c, z) \mid Az \leq b, z \geq 0\}. \quad (9)$$

Двойственной к ней является задача ЛП вида

$$L^* : \min\{(b, u) \mid A^T u \geq c, u \geq 0\}. \quad (10)$$

Задачи (9) и (10) эквивалентно сводятся к системе линейных неравенств, называемой *симметрической*:

$$\left. \begin{aligned} Az \leq b, & & z \geq 0, & & (S_1) \\ A^T u \geq c, & & u \geq 0, & & (S_2) \\ (c, z) = (b, u). & & & & (S_3) \end{aligned} \right\} (S)$$

Хорошо известен факт: если одна из задач (L) и (L^*) разрешима, то и другая разрешима, при этом

$$\text{Arg}(S) = \text{Arg}L \times \text{Arg}L^*.$$

Таким образом, в принципе решение задачи L , равным образом и L^* , сводится к решению системы линейных неравенств (S) .

Рассмотрим систему линейных неравенств (S) с точки зрения распараллеливания ее подсистем:

метод п. 1 для подсистемы (S_1) ;

метод п. 2 для подсистемы (S_2) ;

для (S_3) — *простая операция проектирования на гиперплоскость Π , задаваемую уравнением (S_3) .*

4.1. Метод п. 1 для подсистемы (S_1) : $Az \leq b, z \geq 0$.

Ограничимся случаем разбиения системы (S_1) только на две подсистемы

$$A_1 z \leq b_1, \quad A_2 z \leq b_2. \quad (11)$$

Пусть M_1 — множество решений первой подсистемы, а M_2 — второй подсистемы, тогда полагаем выбор $T_1(z)$ из F_{M_1} , $T_2(z)$ — из F_{M_2} . Оператор $T(z)$ (см. п. 1) образуем согласно соотношению

$$T(z) = (\alpha_1 T_1(z) + \alpha_2 T_2(z))^+,$$

где $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Процесс $\{T^t(z_0)\}_{t=1}^{+\infty}$ сходится к решению системы (S_1) .

4.2. Метод п. 2 для подсистемы (S_2) : $A^T u \geq c, u \geq 0$.

Разбиение двойственного вектора u на подвекторы u_1 и u_2 : $u = [u_1, u_2]$ соответствует разбиению системы (S_1) на подсистемы (11).

Выбор фейеровского оператора $Q(u_1, u_2)$ в смысле фейеровского оператора $Q(x, y)$ в п. 2 осуществляется аналогично тому, как это изложено в п. 2. Далее вводятся операторы $Q_1(u_1 | u_2)$ и $Q_2(u_2 | u_1)$, а также процессы:

$$u_1^{k+1} = [Q_1^+]^{N_1}(u_1^k | u_2^k), \quad u_2^{k+1} = [Q_2^+]^{N_2}(u_2^k | u_1^k).$$

Последние и решают вопросы об итерационном процессе для системы (S_2) .

4.3. Проектирование вектора $[z, u_1, u_2]$ на гиперплоскость Π .

Положим $w = [z, u_1, u_2]$, $d = [c, -b_1, -b_2]$. Исходя из этих обозначений, гиперплоскость Π задается уравнением $(w, d) = 0$. Оператор $\text{Pr}_\Pi(w)$ проектирования элемента w на Π будет иметь вид:

$$\text{Pr}_\Pi(w) = w - \frac{l(w)}{\|d\|^2} d. \quad (12)$$

Подробнее:

$$\text{Pr}_\Pi(z, u_1, u_2) = [z, u_1, u_2] - \frac{l(z, u_1, u_2)}{\|c\|^2 + \|b_1\|^2 + \|b_2\|^2} [c, -b_1, -b_2]. \quad (13)$$

Итоговый фейеровский оператор для системы (S) можно записать так:

$$\tilde{Q}(z, u) = \text{Pr}_\Pi(T(z), Q_1(u_1 | u_2), Q_2(u_2 | u_1)).$$

Справедлива сходимость:

$$\{\tilde{Q}^t(z_0, u_0)\}_{t=1}^{+\infty} \rightarrow [z', u'] \in \text{Arg } S.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] **В. В. Васин, И. И. Еремин.** Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005.
- [2] **И. И. Еремин.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979.
- [3] **И. И. Еремин.** Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: изд-во "Екатеринбург", 1999.