

# Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере «Уран»\*

Е.Н. Акимова<sup>1,2</sup>, В.Е. Мисилов<sup>1,2</sup>, А.Ф. Скурыдина<sup>1,2</sup>, А.И. Третьяков<sup>1,2</sup>

Институт математики и механики УрО РАН<sup>1</sup>, Уральский федеральный университет<sup>2</sup>

Для решения трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела слоев постоянной плотности либо намагниченности для модели многослойной среды предложен линейаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска с весовыми множителями. Построен линейаризованный метод сопряженных градиентов и его модифицированный вариант с весовыми множителями для решения задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде. На основе модифицированных методов градиентного типа разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA. Для модельной задачи проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

## 1. Введение

Важнейшими задачами при исследовании структуры земной коры являются обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной плотности по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности [1] и задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред постоянной вертикальной намагниченности по известным скачкам намагниченности и вертикальной компоненте магнитного поля, измеренной на некоторой площади земной поверхности [2]. Задачи гравиметрии и магнитометрии описываются нелинейными интегральными уравнениями Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [3]. После дискретизации задачи сводятся к системам нелинейных уравнений большой размерности. Необходимость повышения точности результатов решения задач, в частности, использование более мелких сеток, существенно увеличивает время вычислений.

Одним из путей уменьшения времени расчетов и повышения эффективности решения геофизических задач является распараллеливание алгоритмов и использование многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) установлен суперкомпьютер «Уран», который успешно используется при решении прикладных задач. Суперкомпьютер «Уран» включает в себя гибридный вычислительный кластер на основе видеоускорителей GPU NVIDIA Tesla и многоядерных Intel Xeon CPU.

В данной работе для решения трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела слоев постоянной плотности либо намагниченности предложены линейаризованные модифицированные методы наискорейшего спуска и сопряженных градиентов с переменными весовыми множителями для модели нижнего полупространства в форме многослойной среды. На основе модифицированных методов градиентного типа решения задач гравиметрии и магнитометрии для многослойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA. Для модельной задачи проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах».

---

\* Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-7-1-3) и при частичной поддержке РФФИ (проект 15-01-00629а).

## 2. Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред

### 2.1 Обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела для модели многослойной среды

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача гравиметрии о нахождении поверхностей раздела сред по известным скачкам плотности и гравитационному полю, измеренному на некоторой площади земной поверхности.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной плотности, разделенных искомыми поверхностями  $S_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ), где  $L$  — число границ раздела (рис. 1). Гравитационный эффект от такого полупространства равен сумме гравитационных эффектов от всех поверхностей раздела.

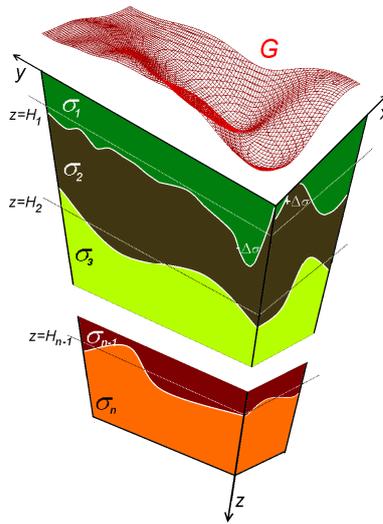


Рис. 1. Модель многослойной среды для задачи гравиметрии

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями  $z_l = z_l(x, y)$ , скачки плотности на них равны  $\Delta\sigma_l$ , поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости  $z_l = H_l$ , т.е.

$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ |y| \rightarrow \infty}} |z_l(x, y) - H_l| = 0$ . Поле от суперпозиции границ с точностью до постоянного слагаемого

равно [4]

$$A(z) \equiv f \sum_{l=1}^L \Delta\sigma_l \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2}} \right) dx dy = \Delta g(x', y', 0), \quad (1)$$

где  $f$  — гравитационная постоянная,  $L$  — число границ раздела,  $\Delta g(x, y, 0) = \sum_{l=1}^L \Delta g_l$  — суммарное аномальное гравитационное поле, измеренное на земной поверхности.

Функции  $z_l = z_l(x, y)$ , описывающие искомые поверхности раздела, удовлетворяют нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода (1).

После дискретизации уравнения (1) на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть  $\Delta g(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора  $A(z)$  по квадратурным формулам имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности  $M \cdot N$ , результирующий вектор решения

$z = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$  размерности  $L \cdot M \cdot N$ , матрицу производной оператора  $A'(z^k)^T$  размерности  $M \cdot N \times L \cdot M \cdot N$  и систему нелинейных уравнений

$$\tilde{A}_n[z] = \tilde{F}_n. \quad (2)$$

Задача является недоопределенной, т.к. по заданной функции  $\Delta g(x, y)$  мы пытаемся найти несколько неизвестных функций  $z_l = z_l(x, y)$ , что влечет неединственность решения.

## 2.2 Обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред для модели многослойной среды

Рассматривается трехмерная структурная обратная задача магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред на основе данных о магнитном поле, измеренном на некоторой площади земной поверхности, и скачкам векторов намагниченности.

Предполагается, что нижнее полупространство состоит из нескольких слоев постоянной вертикальной намагниченности  $J_l = J_l^z$  ( $l = 1, \dots, L$ ), разделенных искомыми поверхностями  $S_l$ , где  $L$  — число границ раздела (рис. 2). Магнитный эффект от такого полупространства равен сумме магнитных эффектов от всех поверхностей раздела.

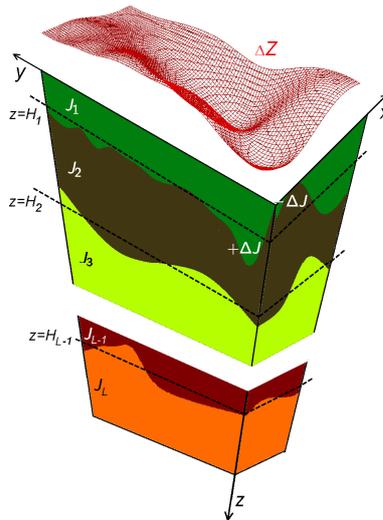


Рис. 2. Модель многослойной среды для задачи магнитометрии

Пусть поверхности раздела задаются уравнениями  $z_l = z_l(x, y)$ , скачки модулей векторов намагниченности на них равны  $\Delta J_l$ , поверхности имеют горизонтальные асимптотические плоскости  $z_l = H_l$ , т.е.  $\lim_{|x|, |y| \rightarrow \infty} |z_l(x, y) - H_l| = 0$ . Поле от суперпозиции границ с точностью до постоянного слагаемого равно

$$B(z) \equiv \sum_{l=1}^L \Delta J_l \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{z_l(x, y)}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z_l^2(x, y)]^{3/2}} - \frac{H_l}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_l^2]^{3/2}} \right) dx dy = \Delta H^z(x', y', 0), \quad (3)$$

где  $\Delta H^z(x, y, 0) = \sum_{l=1}^L \Delta H_l^z$  — суммарное аномальное магнитное поле, измеренное на земной поверхности.

Функции  $z_l = z_l(x, y)$ , описывающие искомые поверхности раздела, удовлетворяют нелинейному двумерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода (3).

После дискретизации уравнения (3) на сетке  $n = M \times N$ , где задана правая часть  $\Delta H^z(x, y)$ , и аппроксимации интегрального оператора  $B(z)$  по квадратурным формулам имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности  $M \cdot N$ , результирующий вектор решения  $z = [z_1(x, y), \dots, z_L(x, y)]$  размерности  $L \cdot M \cdot N$ , матрицу производной оператора  $B(z^k)^T$  размерности  $M \cdot N \times L \cdot M \cdot N$  и систему нелинейных уравнений типа (2)

$$\tilde{B}_n[z] = \tilde{F}_n. \quad (4)$$

Задача является недоопределенной, т.к. по заданной функции  $\Delta H^z(x, y)$  мы пытаемся найти несколько неизвестных функций  $z_l = z_l(x, y)$ , что влечет неединственность решения.

### 3. Методы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела сред

#### 3.1 Линеаризованные методы наискорейшего спуска и минимальной ошибки с переменными весовыми множителями

Обратные задачи гравиметрии и магнитометрии является существенно некорректными задачами, решения которых не единственны и обладают сильной чувствительностью к погрешностям правых частей, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

В работе [5] предлагаются линеаризованные методы градиентного типа с постоянным демпфирующим множителем  $\psi$ , которые можно использовать для решения задач гравиметрии и магнитометрии для модели двухслойной среды. В работах [6, 7] для решения задач гравиметрии и магнитометрии для модели многослойной среды при решении систем нелинейных уравнений (2) и (4) предложены и использованы линеаризованные итерационные методы градиентного типа (наискорейшего спуска и минимальной ошибки) с весовыми множителями  $\gamma_i$ , вычисляемыми для каждой компоненты  $z_i$  ( $i = 1, \dots, L \cdot M \cdot N$ ):

- линеаризованный метод наискорейшего спуска (ЛМНС)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \gamma_i \frac{\|S(z^k)\|^2}{\|A'(z^k)S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad S(z^k) = A'(z^k)^T (A(z^k) - F); \quad (5)$$

- линеаризованный метод минимальной ошибки (ЛММО)

$$z_i^{k+1} = z_i^k - \psi \gamma_i \frac{\|A(z^k) - F\|^2}{\|S(z^k)\|^2} S_i(z^k), \quad (6)$$

где  $z_i$  —  $i$ -ая компонента результирующего вектора  $z$ ,  $k$  — номер итерации,  $\psi$  — демпфирующий параметр.

### 3.2 Линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска

В данной работе для решения задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде предлагается линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска.

Модификация метода (5) состоит во внесении весовых множителей в направление линейного поиска, т. е.  $S(x) = \nabla \left[ \frac{1}{2} \|A(x) - y\|^2 \right]$  заменяется на  $v = \Lambda S(x)$ , где  $\Lambda$  — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей, и в этом направлении ищется минимум суммарной невязки. Это уменьшает число итераций по сравнению с методом (5).

Метод принимает вид:

- линеаризованный модифицированный метод наискорейшего спуска (ЛММНС)

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{v_k^T S(z^k)}{\|A'(z^k)v_k\|^2} v_k, \quad v_k = \Lambda S(z^k), \quad S(z) = A'(z)^T (A(z) - F); \quad (7)$$

где  $\psi$  — демпфирующий параметр,  $k$  — номер итерации,  $\Lambda$  — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \cdot M \cdot N}$ .

### 3.3 Линеаризованный метод сопряженных градиентов и его модифицированный вариант

Построим линеаризованный метод сопряженных градиентов по аналогии с линеаризованными методами наискорейшего спуска и минимальной ошибки.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$A(x) = y$$

с дифференцируемым по Фреше оператором  $A: R^n \rightarrow R^m$ . Если решение существует, то задача его нахождения эквивалентна задаче минимизации  $\min \left\{ \frac{1}{2} \|A(x) - y\|^2 : x \in R^n \right\}$ .

Обозначим  $S(x) \equiv A'(x)^T (A(x) - y) = \nabla \left[ \frac{1}{2} \|A(x) - y\|^2 \right]$ . Для решения задачи предлагается итеративный процесс вида

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad (8)$$

где  $k \geq 0$  — номер итерации,  $x_0 \in R^n$  — некоторое начальное приближение,  $\alpha_k$  — размер шага, направления  $p_k$  получаются по формуле

$$p_k = -A'(x_k)^T (A(x_k) - y) + \beta_k p_{k-1},$$

$$p_0 = -A'(x_0)^T (A(x_0) - y),$$

и параметры  $\beta_k$  по модифицированной формуле Полака-Рибьера-Поляка [8]

$$\beta_k = \beta_k^{PRP+} = \max \{ \beta_k^{PRP}, 0 \},$$

$$\beta_k^{PRP} = \frac{S(x_k)^T (S(x_k) - S(x_{k-1}))}{\|S(x_{k-1})\|^2}.$$

Такой процесс можно назвать вариантом нелинейного метода сопряженных градиентов [9]. В классических методах размер шага  $\alpha_k$  находится решением задачи:

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha} \left\{ \|A(x_k + \alpha p_k) - y\|^2 \right\},$$

т.е. на каждой итерации необходимо решить одномерную задачу минимизации.

Вместо выполнения этой трудоемкой процедуры модифицируем процесс (8) аналогично линейризованным градиентным методам из [10].

Линейризуем оператор  $A$  в точке  $x_k$

$$A(x) \cong A(x_k) + A'(x_k)(x - x_k)$$

и найдем размер шага  $\alpha_k$  решением задачи минимизации для линейризованного выражения:

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha} \left\{ \|A(x_k) + A'(x_k)(x_k + \alpha p_k - x_k) - y\|^2 \right\} = \arg \min_{\alpha} \left\{ \|A(x_k) - y + \alpha A'(x_k) p_k\|^2 \right\} =$$

$$= \arg \min_{\alpha} \left\{ \|A(x_k) - y\|^2 + 2\alpha p_k^T S(x_k) + \alpha^2 \|A'(x_k) p_k\|^2 \right\}.$$

Отсюда размер шага находится по формуле

$$\alpha_k \approx \tilde{\alpha}_k = -\frac{p_k^T S(x_k)}{\|A'(x_k) p_k\|^2}.$$

После добавления демпфирующего множителя  $\psi$  процесс (8) запишется в виде:

- линейризованный метод сопряженных градиентов (ЛИМСГ)

$$x_{k+1} = x_k - \psi \frac{p_k^T S(x_k)}{\|A'(x_k) p_k\|^2} p_k, \quad p_k = S(x_k) + \beta_k p_{k-1}, \quad p_0 = S(x_0),$$

$$\beta_k = \max \left\{ \frac{S(x_k)^T (S(x_k) - S(x_{k-1}))}{\|S(x_{k-1})\|^2}, 0 \right\}, \quad S(x) = A'(x)^T (A(x) - y). \quad (9)$$

Метод (9) можно использовать для решения структурных задач для моделей двуслойной среды.

Для решения задач гравиметрии и магнитометрии в многослойной среде, сводящимся к системам (2) и (4), модифицируем метод (9), добавив весовые множители  $\gamma_i$  в направления

$S(z^k)$  аналогично (7).

Таким образом, имеем:

- линейризованный модифицированный метод сопряженных градиентов (ЛММСГ)

$$z^{k+1} = z^k - \psi \frac{p_k^T S(z^k)}{\|A'(z^k) p_k\|^2} p_k, \quad p_k = v_k + \beta_k p_{k-1}, \quad p_0 = v_0, \quad v_k = \Lambda S(z^k),$$

$$\beta_k = \max \left\{ \frac{v_k^T (v_k - v_{k-1})}{\|v_{k-1}\|^2}, 0 \right\}, \quad S(z) = A'(z)^T (A(z) - F),$$
(10)

где  $\psi$  — демпфирующий параметр,  $k$  — номер итерации,  $\Lambda$  — диагональная матрица, состоящая из весовых множителей  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \cdot M \cdot N}$ .

### 3.4 Выбор весовых множителей

Для компенсации разномасштабности фрагментов вектора решения проведем замену переменных и будем искать не абсолютное значение  $z_l(x, y)$ , а относительное отклонение от асимптотической плоскости  $\bar{z}_l(x, y) = z_l(x, y) / H_l - 1$ .

Весовые множители  $\gamma_i$  для каждой компоненты  $z_i$  ( $i = 1, \dots, L \cdot M \cdot N$ ) будем выбирать следующим образом:

$$F \rightarrow [F_1, F_2, \dots, F_L] = (f_1, f_2, \dots, f_{M \cdot N}, \dots, f_{L \cdot M \cdot N}) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \cdot M \cdot N}),$$

$$F_l \rightarrow (\gamma_{M \cdot N \cdot (l-1)+1}, \gamma_{M \cdot N \cdot (l-1)+2}, \dots, \gamma_{M \cdot N \cdot l}), \quad \gamma_i = \frac{|f_i|^\beta}{\max_{i,l} |f_i|^\beta}, \quad \beta > 1,$$

либо

$$\hat{Z} = [\hat{Z}_1, \hat{Z}_2, \dots, \hat{Z}_L] = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \dots, \hat{z}_{M \cdot N}, \dots, \hat{z}_{L \cdot M \cdot N}) \rightarrow (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L \cdot M \cdot N}),$$

$$\hat{Z}_l \rightarrow (\gamma_{M \cdot N \cdot (l-1)+1}, \gamma_{M \cdot N \cdot (l-1)+2}, \dots, \gamma_{M \cdot N \cdot l}), \quad \gamma_i = \frac{\left| \frac{\hat{z}_i}{H_l} - 1 \right|^\beta}{\max_{i,l} \left| \frac{\hat{z}_i}{H_l} - 1 \right|^\beta}, \quad \beta > 1,$$

где  $F_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ) — аномальные поля от гравитирующих либо магнитных масс, находящиеся между соответствующими глубинами  $H_{l-1}$  и  $H_{l+1}$  ( $H_0 = 0$ ,  $H_{L+1} = +\infty$ ) для искомым поверхностей раздела  $S_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ), выделенные из общего гравитационного  $\Delta g(x, y)$  или магнитного поля  $\Delta H^z(x, y)$  по методике [11],  $\hat{Z}_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ) — известные нулевые приближения соответствующих искомым поверхностей раздела  $S_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ),  $\beta$  — сглаживающий параметр.

В качестве начального приближения можно использовать горизонтальные асимптотические плоскости  $\bar{z}^0 = 0$  либо известное нулевое приближение  $\hat{Z}$ . Условием останова итераци-

онных процессов является выполнение условия  $\|A(z) - F\| / \|F\| < \varepsilon$  при достаточно малом  $\varepsilon$ , где  $F = \sum_{l=1}^L F_l$ .

#### 4. Распараллеливание и численная реализация итерационных методов решения обратных задач

Параллельные алгоритмы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела сред для модели многослойной среды на основе модифицированных линеаризованных градиентных методов численно реализованы на многоядерном процессоре Intel и графических процессорах NVIDIA, входящими в состав суперкомпьютера «Уран» (ИММ УрО РАН). Параллельные алгоритмы реализованы на многоядерном процессоре Intel с помощью технологии OpenMP, на GPU NVIDIA Tesla — с помощью технологии CUDA и библиотеки CUBLAS.

Алгоритмы имеют два узких места: вычисление на каждой итерации значений интегрального оператора  $A(z^k)$  и матрицы производных  $A'(z^k)$  и матрично-векторные операции.

Распараллеливание проводится путем деления матрицы  $A'(z^k)$  горизонтальными полосами на  $m$  блоков и вектора  $A(z^k)$  на  $m$  фрагментов, таких что  $n = m \times K$ , где  $n$  — размерность матрицы и векторов,  $m$  — число процессорных ядер,  $K$  — число строк матрицы и элементов вектора в блоке. Основной поток исполнения (помимо исполнения своего фрагмента расчетов) занимается созданием дополнительных OpenMP-потоков и их синхронизацией. На текущей итерации каждый дополнительный поток вычисляет свой блок матрицы производных и вектора  $A(z^k)$ , а затем основной поток объединяет результаты.

С целью оптимизации выполнения векторно-матричных операций проведено распараллеливание и векторизация циклов с помощью технологии OpenMP и средств компилятора Intel соответственно.

При реализации на CUDA при нахождении значения оператора и матрицы производных kernel-функция выполняет фрагмент вычислений, соответствующий одной точке сетки, а результаты объединяются с помощью атомарных операций. Стандартные векторно-матричные операции выполняются с использованием функций библиотеки CUBLAS.

Матрица  $A'(z^k)$  имеет большую размерность и занимает значительный объем оперативной памяти, поэтому оптимальным оказывается метод вычисления элементов матрицы производных «на лету», то есть вычисление значения элемента матрицы происходит в момент обращения к этому элементу без сохранения его в памяти.

Алгоритмы решения структурных обратных задач магнитометрии о восстановлении поверхностей раздела сред встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислителях» [12], установленный в Отделе некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики УрО РАН. В настоящее время пилотная версия веб-портала предусматривает запуск программ для решения задач грави-магнитометрии на суперкомпьютере «Уран» с указанием числа процессорных узлов или ядер (NVIDIA Tesla, Multi-Core CPU).

#### 5. Результаты численных экспериментов

Здесь мы рассмотрим решение структурной задачи гравиметрии для трехслойной среды, разделенной двумя искомыми поверхностями на площади  $S$ , имеющей размеры  $99 \times 109$  км<sup>2</sup>.

Суммарное гравитационное поле  $\Delta g(x, y)$  на площади  $S$  находилось путем решения прямой задачи гравиметрии (1) с известными границами раздела (рис. 3):

$$z_1(x, y) = 5 - 3.21 e^{-(x/10.13 - 6.62)^6 - (y/9.59 - 2.93)^6} -$$

$$- 2.78 e^{-(x/9.89 - 4.12)^6 - (y/8.63 - 7.435)^6} + 3.19 e^{-(x/9.89 - 4.82)^6 - (y/8.72 - 4.335)^6},$$

$$z_2(x, y) = 20 - 18.64 e^{-(x/25.14 - 2.23)^2 - (y/28.45 - 1.75)^2}.$$

Расстояния до асимптотических плоскостей принимались равными  $H_1 = 5$  км и  $H_2 = 20$  км. Скачки плотностей на границах принимались равными  $\Delta\sigma_1 = 0.21$ ,  $\Delta\sigma_2 = 0.07$  г/см<sup>3</sup>.

После дискретизации уравнения (1) на сетке  $256 \times 256$  имеем вектор правой части  $F(x, y)$  размерности 65536, результирующий вектор решения  $z = [z_1(x, y), z_2(x, y)]$  размерности 131072, матрицу производной оператора  $A'(z^k)^T$  размерности  $65536 \times 131072$  и систему нелинейных уравнений вида (2).

На рис. 3 изображены модельные поверхности «квадратные горка и впадина» и «впадина». На рис. 4 изображено общее аномальное гравитационное поле, порождаемое этими поверхностями.

Задача решалась тремя методами с весовыми множителями: линейризованным методом наискорейшего спуска (5), модифицированными методами наискорейшего спуска (7) и сопряженных градиентов (10).

На рис. 5 приводятся приближенные решения структурной задачи гравиметрии в трехслойной среде с модельными данными.

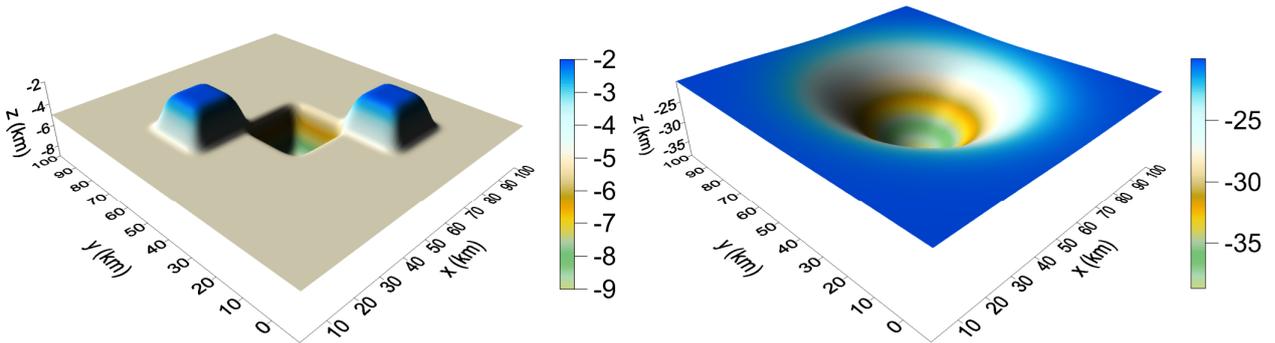


Рис. 3. Модельные границы  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$

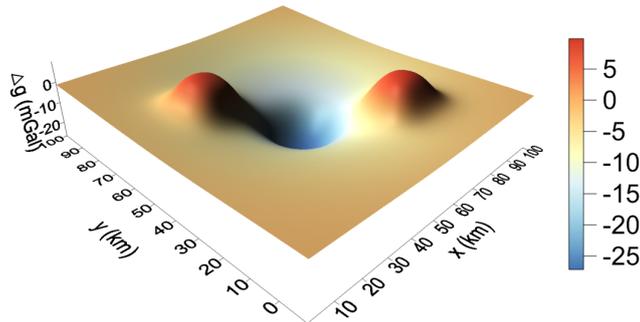


Рис. 4. Общее аномальное гравитационное поле

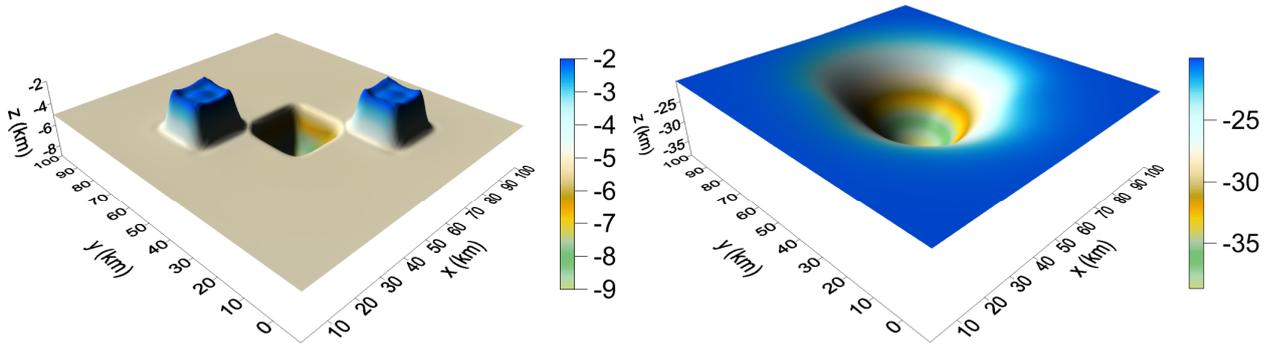


Рис. 5. Восстановленные границы  $\tilde{z}_1(x, y)$  и  $\tilde{z}_2(x, y)$

Задача решалась на вычислительных узлах суперкомпьютера «Уран»: на многоядерном процессоре Intel Xeon с применением технологии OpenMP и на графических процессорах NVIDIA Tesla с помощью технологии CUDA. Для многоядерных процессоров проведена оптимизация выполнения векторно-матричных операций опциями компилятора ICC и векторизация циклов с помощью директивы `#pragma simd`. В результате время решения задачи уменьшилось в несколько раз.

Для модельной задачи гравиметрии проведено сравнение градиентных методов и параллельных алгоритмов по относительной погрешности, числу итераций и времени счета.

В табл. 1 представлены результаты решения задачи гравиметрии в трехслойной среде для модельных поверхностей. В первом столбце таблицы приводится метод решения задачи. При решении задачи весовые множители  $\gamma_i$  выбирались из нулевых приближений границ с параметром  $\beta = 1.2$ . Демпфирующий параметр для модифицированных методов брался равным  $\psi = 0.5$ , для немодифицированного метода наискорейшего спуска  $\psi = 1$ . Условие останова  $\varepsilon = 0.01$ . Во втором и третьем столбцах таблицы приводятся наименьшие относительные погрешности восстановленных поверхностей  $\delta_i = \frac{\|z_i^T - z_i^{np}\|}{\|z_i^T\|}$ , где  $\delta_1$  — погрешность для  $H_1 = 5$  км,  $\delta_2$  — погрешность для  $H_2 = 20$  км. В четвертом столбце приводится число итераций  $N$ . В остальных столбцах приводятся времена решения задачи:  $T_1$  — время решения на одном ядре процессора Intel Xeon E5-2660 (2.2 ГГц),  $T_2$  — время решения на 8 ядрах Intel Xeon,  $T_3$  — время решения на GPU NVIDIA Tesla M2090.

Таблица 1. Относительные погрешности и времена решения модельной задачи

Метод	$\delta_1$	$\delta_2$	$N$	$T_1$	$T_2$	$T_3$
ЛМНС	0.028	0.032	166	14.5 часов	113 мин.	14.4 мин.
ЛММНС	0.028	0.034	30	2.55 часа	20 мин.	3.3 мин.
ЛММСГ	0.028	0.032	21	1.9 часа	14 мин.	2.3 мин.

Численные эксперименты, выполненные для модельной задачи, показали, что использование модифицированных методов градиентного типа по сравнению с их немодифицированными вариантами на порядок уменьшает число итераций при сравнимой относительной погрешности. Линеаризованный модифицированный метод сопряженных градиентов работает быстрее.

Распараллеливание алгоритмов при решении обратных задач гравиметрии на многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией и GPU NVIDIA Tesla уменьшает время счета. Решение задачи на 8 ядрах Intel Xeon модифицированными градиентными методами составило менее 20 минут. Решение задачи на GPU модифицированными методами — две-три минуты.

## 5. Заключение

Для решения трехмерных структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии о нахождении поверхностей раздела для модели многослойной среды предложен модифицированный метод наискорейшего спуска. Построен линеаризованный метод сопряженных градиентов и его модифицированный вариант для решения задач в многослойной среде. На основе линеаризованных модифицированных методов градиентного типа решения задач гравиметрии и магнитометрии для моделей многослойной среды разработаны эффективные параллельные алгоритмы, численно реализованные на многоядерных процессорах и графических процессорах NVIDIA, входящих в состав суперкомпьютера «Уран». Проведена оптимизация параллельных алгоритмов. Параллельные алгоритмы встроены в разработанную систему удаленных вычислений «Специализированный веб-портал решения задач на многопроцессорных вычислительных системах». Решена модельная задача гравиметрии, проведено сравнение параллельных итерационных алгоритмов по числу итераций и времени счета. Распараллеливание алгоритмов при решении обратных задач магнитометрии на многоядерном процессоре Intel Xeon с оптимизацией и графических процессорах NVIDIA Tesla уменьшает время счета.

Авторы выражают благодарность члену-корреспонденту РАН В.В. Васину за полезные обсуждения и внимание к работе.

## Литература

1. Нумеров Б. В. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. 1930. № 21. С. 569–574.
2. Малкин Н. Р. О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности (случай пластообразно залегающих масс) // ДАН СССР. Сер. А. 1931. № 9. С. 232–235.
3. Bakushinsky A., Goncharsky A. Ill-Posed Problems: Theory and Applications. London: Kluwer Akad. Publ. 1994.
4. Мартышко П. С., Ладовский И. В., Цидаев А. Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика земли. 2010. № 11. С. 23–35.
5. Васин В. В. О сходимости методов градиентного типа для нелинейных уравнений // ДАН. 1998. Т. 359. № 1. С. 5–7.
6. Акимова Е. Н., Мартышко П. С., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // ДАН. 2013. Т. 453. № 6. С. 676–679.
7. Акимова Е. Н., Мисилов В. Е., Скурыдина А. Ф. Параллельные алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии на многопроцессорных вычислительных системах // Вестник УГАТУ. 2014. Т.18. № 4 (65). С. 206-215.
8. Gilbert, Jean Charles, and Jorge Nocedal. Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization // SIAM Journal on optimization. 1999. 2. no. 1. pp. 21-42.
9. Kaltenbacher, Barbara, Andreas Neubauer, and Otmar Scherzer. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin: Walter de Gruyter. 2008. Vol. 6.
10. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН. 2005.
11. Мартышко П. С., Пруткин И. Л. Технология разделения источников гравитационного поля по глубине // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. № 3. С. 159–168.
12. Акимова Е. Н., Белоусов Д. В., Мисилов В. Е. Алгоритмы решения обратных геофизических задач на многопроцессорных вычислительных системах // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 6. № 2. С. 107–121.