

Численное моделирование резонансного возбуждения колебаний плазмы, нагреваемой электронным пучком*

Е.А. Берендеев¹, А.А. Ефимова²

Новосибирский государственный университет¹,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН²

Рассматривается задача взаимодействия электронного пучка с плазмой. Физический механизм взаимодействия плазмы с релятивистским электронным пучком включает в себя резонансное возбуждение колебаний плазмы, возникновение модуляции плотности плазмы с последующим рассеянием электронов в области с повышенной плотностью. Для моделирования этих эффектов использовался метод частиц-в-ячейках (PIC-метод). Задача является достаточно ресурсоемкой, поэтому для ее решения реализован параллельный алгоритм, расчеты проводились на различных СуперЭВМ.

1. Введение

Одной из важнейших задач физики плазмы является нагрев высокотемпературной плазмы в термоядерных установках. В настоящей работе на основе численного моделирования исследуются процессы установления и нелинейной эволюции квазистационарной плазменной турбулентности, возбуждаемой мощным электронным пучком в установках УТС. При этом наибольший интерес представляют параметры пучка и плазмы, которые характерны для экспериментов по нагреву плазмы в открытой ловушке ГОЛ-3 (ИЯФ СО РАН) [1]. Установка ГОЛ-3 состоит из многопробочной термоядерной ловушки открытого типа с плотной плазмой, которая по своим параметрам является субтермоядерной, и генератора сильноточного релятивистского электронного пучка (РЭП), используемого для нагрева плазмы. Одним из важных достижений последних лет в физике открытых ловушек стало обнаружение подавления продольной электронной теплопроводности на торцы установки в процессе инжекции РЭП.

На данном этапе работы над задачей создан алгоритм и программа, позволяющая моделировать эффекты теплопроводности в плазме. Рассматривалось приближение бесстолкновительной плазмы, которая описывается системой уравнений Власова-Максвелла. Для моделирования задачи использовался метод частиц-в-ячейках (PIC-метод). Для тестирования программы рассматривалась задача о двухпотоковой неустойчивости. Известно, что электронный пучок, распространяющийся в плотной плазме, неустойчив по отношению к продольной модуляции плотности. Для нахождения гармоник с максимальным инкрементом нарастания напряженности электрического поля проводился дисперсионный анализ. Рассматривалась трехмерная полная гидродинамическая постановка задачи в предположении, что движение происходит вдоль оси x . Численное моделирование показало хорошее соответствие результатов с полученным аналитическим решением.

2. Постановка задачи

Полноценное исследование физических процессов в плазме может быть проведено только при комплексном подходе, сочетающем как экспериментальные исследования, так и исследования вычислительными методами, адекватно описывающими эти процессы. Для того чтобы избежать упрощений и получить качественно правильную физическую картину, необходимо построить максимально полную математическую модель. Общепринято, что хорошей исходной моделью полностью ионизованной бесстолкновительной плазмы является система уравнений, состоящая из кинетических уравнений Власова [2] для функций распределения ионов и электронов и уравнений Максвелла с самосогласованными электромагнитными полями:

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-07-00065, № 11-01-00249 и интеграционного проекта СО РАН № 130.

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) f_k + q_k \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \frac{\partial f_k}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi \rho \quad (1.4)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0 \quad (1.5)$$

$$\vec{j} = \sum_k q_k \int \vec{v} f_k(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p} \quad (1.6)$$

$$\rho = \sum_k q_k \int f_k(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p} \quad (1.7).$$

Здесь индексом k обозначается сорт частиц (ионы и электроны плазмы, электроны пучка); $f_k(\vec{p}, \vec{r}, t)$ - функция распределения частиц сорта k ; q_k - заряд; \vec{j} - плотность тока; ρ - плотность пространственного заряда; \vec{E} - напряжённость электрического поля; \vec{H} - напряжённость магнитного поля.

Уравнение (1.1) является бесстолкновительным кинетическим уравнением Власова, уравнения (1.2-1.5) образуют систему уравнений Максвелла, уравнения (1.6), (1.7) определяют плотности тока и заряда через функции распределения частиц. Предполагаем, что все величины зависят от пространственных декартовых координат (x ; y). Расчетная область имеет форму прямоугольника: ($0 \leq x \leq L_x$; $0 \leq y \leq L_y$), направление инжекции пучка параллельно оси x . Граничные условия периодические. Налагались условия однородности начальной плотности электронов, ионов и электронов пучка. Система уравнений (1.1 – 1.7) является самосогласованной интегро-дифференциальной системой уравнений. Наиболее хорошо для решения подобных систем уравнений себя зарекомендовал метод частиц-в-ячейках [2]. При использовании этого метода плазма моделируется набором дискретных частиц, траектории движения которых являются характеристиками уравнения (1.1). Таким образом, решаемая система уравнений состоит из уравнений Максвелла и релятивистских уравнений движения для макрочастиц.

3. Решение основных уравнений

Решение уравнения Власова производится в лагранжевых координатах – характеристики этого уравнения описывают движение модельных частиц:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q_k}{m_k} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right), \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (2.1)$$

Здесь m_k - масса частицы сорта k .

В этом случае используется следующая схема с перешагиванием:

$$\frac{p_i^{m+1/2} - p_i^{m-1/2}}{\tau} = \frac{q_k}{m_k} \left(E_i^m + \frac{1}{c} \left[\frac{v_i^{m+1/2} + v_i^{m-1/2}}{2}, H_i^m \right] \right) \quad (2.2)$$

Уравнения Максвелла решаются в эйлеровых переменных. Необходимые для их решения плотности заряда и тока определяются по скоростям и координатам отдельных частиц:

$$j(r, t) = \sum_i q_i v_i(t) R(r, r_i(t)) \quad (2.3)$$

$$\rho(r, t) = \sum_i q_i R(r, r_i(t)) \quad (2.4)$$

Здесь q_i – заряд частицы с номером i ; функция $R(r, r_i(t))$ - (функция ядра) характеризует форму, размер частицы и распределение в ней заряда.

В настоящей работе плотности заряда и плотности тока вычисляются по формулам, предложенным Вилласенором и Бунеманом [3]. При таком подходе разностный аналог уравнения (1.4) выполняется автоматически.

Для нахождения электрических и магнитных полей используется схема, в которой напряженность электрического и магнитного полей вычисляются на сетках, смещенных относительно друг друга по времени и пространству [3]:

$$\frac{H^{m+1/2} - H^{m-1/2}}{\tau} = -c \text{rot}_h E^m \quad (2.5)$$

$$\frac{E^{m+1} - E^m}{\tau} = -4\pi j^{m+\frac{1}{2}} + c \text{rot}_h H^{m+\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Таким образом, схема решения задачи на одном шаге разбивается на два этапа. На первом (лагранжевом) этапе по схеме (2.2) вычисляются скорости и координаты частиц. Здесь же определяются компоненты плотности тока $j^{m+1/2}$ и плотности заряда ρ^{m+1} . На втором (эйлеровом) этапе решаются уравнения Максвелла, т.е. определяются значения $H^{m+1/2}$ и E^{m+1} в узлах сетки. Значения электрических и магнитных полей, действующих на каждую частицу, вычисляются с помощью билинейной интерполяции.

4. Параллельная реализация алгоритма

В настоящей работе используется смешанная эйлерово-лагранжевая декомпозиция. Область делится на несколько подобластей вдоль одного измерения. На рисунке 1 приведена иллюстрация используемого метода - с каждой подобластью связана группа процессоров и частицы в каждой подобласти разделены между всеми процессорами группы. Каждая группа решает уравнения Максвелла только в своей подобласти. В этом случае происходит обмен граничными значениями полей между группами, также группы должны обмениваться частицами, перелетевшими в соответствующую подобласть. Внутри группы происходит обмен значениями плотности тока (как и в первом варианте распараллеливания).

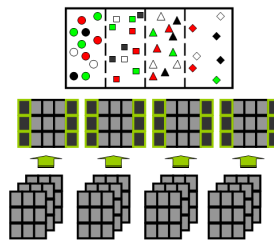


Рис. 1. Декомпозиция области и межпроцессорные коммуникации

Как было показано в работе [4], использование эйлерово-лагранжевой декомпозиции может дать существенное ускорение расчёта по сравнению с другими реализациями – это связано с уменьшением объёма пересылаемых данных и более эффективным использованием кэш-памяти процессорных ядер. В то же время из-за декомпозиции области может возникать дисбаланс по количеству частиц на разных процессорах, что приводит к неравномерной загрузке вычислительных ядер. Использование одномерной декомпозиции отчасти помогает решить эту проблему.

Программа реализована на языке Fortran-90 с использованием MPI. Расчёты проводились на следующих вычислительных системах:

- Суперкомпьютер «Ломоносов» Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ имени М.В.Ломоносова, г. Москва. Процессоры Intel Xeon 5570 2932 МГц, Cache 8 Mb;
- Суперкомпьютер «НКС-30Т» (НКС-G6) Сибирского Суперкомпьютерного Центра ИВ-МиМГ СО РАН, г. Новосибирск. Процессоры Intel Xeon E5540 2530 МГц, Cache 8 Mb.

4.1. Масштабируемость

Проведено исследование масштабируемости параллельного алгоритма на суперкомпьютере «Ломоносов». В таблице 1 представлено время расчёта одного шага (в секундах) при использовании различного количества процессорных ядер, а также полученное при этом ускорение. В связи с большим объёмом требуемой оперативной памяти, масштабируемость рассматривается относительно 256 процессорных ядер. Использование меньшего количества процессорных ядер не представляет собой интереса с точки зрения реальных задач. Параметры задачи:

- Число узлов 1024x1024, декомпозиция области вдоль направления Y на 64 подобласти
- Число частиц в ячейке 2500 (Всего 2 621 440 000 частиц)

Общее количество используемых сорных ядер	Число процессорных ядер на подобласть	Время расчёта одного шага, сек.	Ускорение по сравнению с 256 процессорными ядрами
256	4	2,737	1
512	8	1,448	1,89
1024	16	0,763	3,58

Таб. 1. Время счёта одного шага (в секундах) для различного числа процессоров и полученное ускорение.

5. Вычислительный эксперимент

5.1. Расчёт инкремента амплитуды поля

Для тестирования рассматривалась задача о двухпотоковой неустойчивости. Расчетная область имеет форму прямоугольника. Ионы образуют однородный неподвижный фон. В расчетной области находятся два пучка электронов. Предполагается, что оба пучка занимают все пространство области. Граничные условия периодические, т.е. если частица вылетает за пределы области, то она вносится снова в область с другой стороны границы. Начальное распределение электронов пространственно однородно и представляет собой суперпозицию двух встречных максвелловских потоков, т.е.

$$f_0(v) = a_1 \exp\left[-\frac{(\vec{v}-\vec{v}_0)^2}{2\sigma_1^2}\right] + a_2 \exp\left[-\frac{(\vec{v}+\vec{v}_0)^2}{2\sigma_2^2}\right].$$

С течением времени пучки начинают взаимодействовать и постепенно переходят в один пучок электронов с максвелловской функцией распределения частиц по скоростям. В процессе этого взаимодействия возникает, так называемая, двухпотоковая неустойчивость. На рис.2 приведены фазовые плоскости в начальный момент времени (рис.2а) и в момент времени, соответствующий нарастанию неустойчивости (рис.2б):

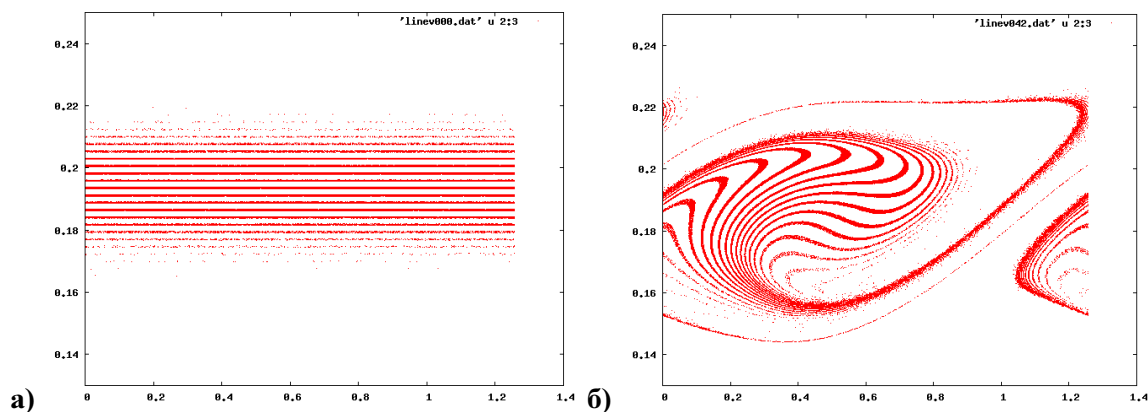


Рис. 2. Фазовые плоскости в а) начальный момент времени, б) момент времени, соответствующий нарастанию неустойчивости

На рис.3 представлен график изменения напряженности электрического поля в зависимости от времени для сетки 102x4:

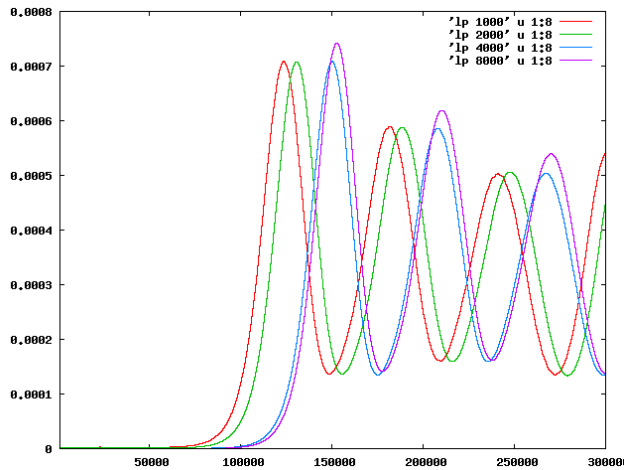


Рис. 3. Напряженность электрического поля в зависимости от времени (время в 0.001 плазменного периода) для различного числа частиц в ячейке (l_p)

Из графиков видно, что на некотором временном участке происходит нарастание амплитуды электрического поля. Напряженность электрического поля в этом случае описывается экспоненциальной функцией. Из рисунка 3 видно, что при увеличении числа частиц в ячейке этот временной участок сдвигается вправо по шкале времени. Было найдено численное и аналитическое значение инкремента нарастания амплитуды поля.

Для определения аналитического значения инкремента проводился дисперсионный анализ задачи в полной гидродинамической постановке. Для этой системы уравнений выполняем линеаризацию, т.е. представляем каждую функцию в виде: $f = f^0 + f^*$, где f - одна из функций $n, v_x, v_y, v_z, n_b, v_{bx}, v_{by}, v_{bz}, E_x, E_y, E_z, V_x, V_y, V_z$, f^0 - начальное значение функции, f^* - отклонение.

Предполагаем, что любую функцию f^* можно представить в виде: $f^* = \tilde{f} \exp(-i\omega t + ikx)$, где \tilde{f} - амплитуда волны, ω - частота колебаний, k - волновое число. Искомый инкремент роста амплитуды поля определяется как $\gamma = \text{Im}(\omega) > 0$ (рис.4). Из рисунка видим, что искомое значение γ получается при $k = 0.69$, которое соответствует локальному максимуму функции γ .

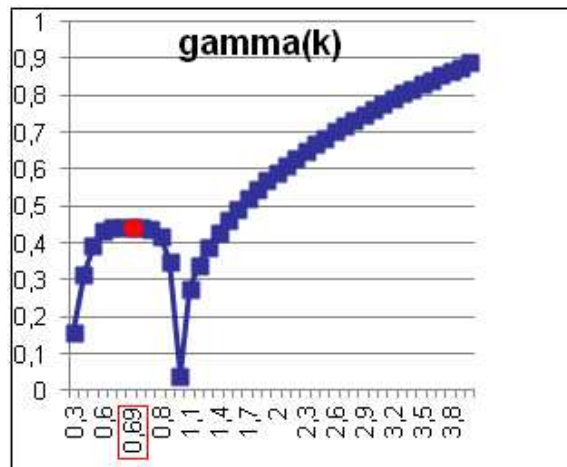


Рис. 4. Инкремент роста амплитуды поля.

5.2. Модуляция плотности

Рассматривается следующая задача:

в области, имеющей форму прямоугольника, находится полностью ионизованная плазма, состоящая из электронов и ионов. Дополнительно в область вводится пучок заряженных частиц – набор электронов, движущихся в одном направлении с достаточно большой относительно остальных частиц скоростью; предполагается, что пучок уже полностью вошёл в моделируемую область. Модельные электроны пучка имеют меньшую массу, нежели модельные электроны плазмы (отношение их масс равно отношению плотности плазмы и плотности пучка [5]). Все частицы (как плазмы, так и пучка) распределены по области равномерно. Условия на границах области выбраны периодические.

Характерные значения: температура плазмы 500 эВ, отношение плотности пучка к плотности плазмы $2 \cdot 10^{-3}$. Размер области 1024 микрометра по каждому направлению. Сетка 1024x1024 узла, общее число модельных частиц 5 242 880 000. Расчёты проводились на суперкомпьютере «Ломоносов» с использованием до 8192 процессорных ядер. Программа реализована на языке Fortran-90 с использованием MPI.

Была исследована эволюция плотности заряда электронного пучка с развитием плазменной турбулентности. В начальный момент времени заряд электронов пучка распределен по области равномерно. При взаимодействии с плазмой в результате резонансных колебаний образуются участки модуляции плотности – от -0,0008 до -0,0037 (при начальной плотности заряда -0,002), т.е. модуляция составляет более 200% (рис. 5).

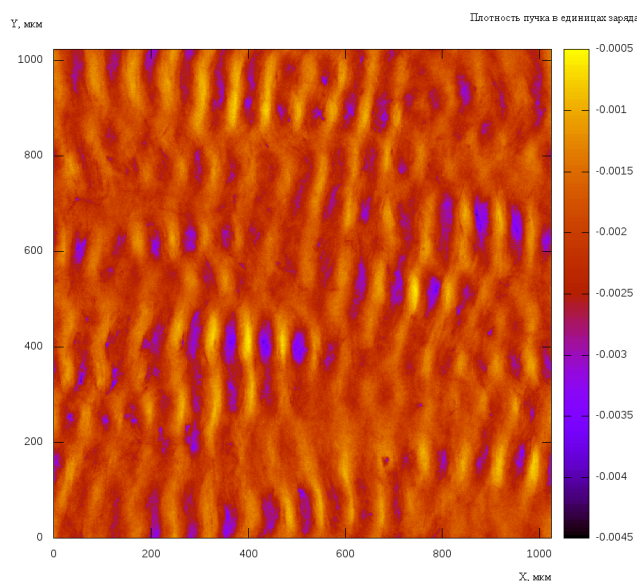


Рис. 5. Плотность заряда электронного пучка в единицах заряда электрона.

6. Заключение

В работе показано, что используемая модель позволяет моделировать эффекты теплопроводности в плазме. Рассматриваемая задача достаточно ресурсоемка, но используемый масштабируемый параллельный алгоритм, обеспечивающий равномерную загрузку вычислительных ядер, позволяет выполнять сложные расчеты. В частности, для задачи взаимодействия релятивистского электронного пучка с плазмой удалось воспроизвести эффект возникновения модуляций плотности плазмы и резонансных колебаний плазмы. Как предполагается, именно за счет этих механизмов происходит подавления продольной электронной теплопроводности на торцы установки в процессе инжекции РЭП.

Литература

1. Бурдаков А.В., Поступаев В.В. Особенности переноса тепла при пучковом нагреве плазмы в экспериментах на установке ГОЛ-3. Новосибирск, 1992 (Препринт ИЯФ СО РАН; № 9).
2. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы // Новосибирск: "Наука", 1980.
3. Langdon A.B, Lasinski B.F. Electromagnetic and relativistic plasma simulation models // Meth. Comput. Phys. Vol. 16, 1976, P.327-366.
4. Берендеев Е.А., Ефимова А.А. Реализация эффективных параллельных вычислений при моделировании больших задач физики плазмы методом частиц в ячейках // Сборник трудов Международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии 2012» Новосибирск: 2012. С.380-385.
5. Вшивков В.А., Снытников А.В. Вычисление температуры при моделировании высокотемпературной плазмы методом частиц-в-ячейках на суперЭВМ // Научный вестник НГТУ. Новосибирск: 2010, № 3(40), С.61-68.