

# Сферическая блоковая модель: оптимизация вычислительной нагрузки и новые результаты моделирования\*

Л.А. Мельникова, В.Л. Розенберг

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Представлено краткое описание последней версии сферической блоковой модели динамики и сейсмичности литосферы. В модификации определяется механизм модельного землетрясения и реализована попытка учета случайных факторов, влияющих на величины порогов прочности среды. Для проведения новых расчетов разработана методика динамического перераспределения вычислительной нагрузки между процессорами МВС в предположении о стационарности модельного потока событий. Обсуждаются результаты некоторых численных экспериментов с блоковой структурой, аппроксимирующей глобальную систему тектонических плит.

## 1. Последняя версия сферической блоковой модели

В настоящей работе представлены новые результаты, полученные в задаче численного моделирования динамики и сейсмичности литосферы [1, 2] посредством разработанной авторами сферической блоковой модели. Фактически работа является продолжением исследований [3–5], в которых, с одной стороны, достаточно подробно изложено обоснование актуальности моделирования сейсмичности по причине крайне короткой истории надежных инструментальных наблюдений, а с другой, приведен обзор различных подходов к изучению литосферных процессов с указанием соответствующих ссылок (отметим работу [1] и библиографию к ней). Необходимость получения искусственного каталога землетрясений, в котором каждое событие характеризуется моментом времени, координатами эпицентра, глубиной и магнитудой, на достаточно большом временном интервале объясняется возможностью анализа по такому каталогу статистической значимости некоторых закономерностей, предшествующих сильным толчкам в реальном сейсмическом потоке. Новизна данной работы состоит в описании дополнительных возможностей математической модели и программной реализации, а также результатов инспирированных ими вычислительных экспериментов. Приведем краткое описание последней версии сферической блоковой модели.

Блоковая структура в сферической модели является ограниченной и односвязной частью шарового слоя глубиной  $H$ , заключенного между двумя концентрическими сферами, одна из которых (внешняя) интерпретируется как поверхность Земли, другая (внутренняя) — как нижняя граница упругой литосферы. Разделение структуры на блоки определяется пересекающимися этот слой бесконечно тонкими разломами, каждый из которых представляет собой коническую поверхность, наклоненную под определенным углом к внешней сфере. Общие точки двух разломов на внешней и внутренней сферах называются вершинами. Участки разломов, ограниченные соответствующими парами соседних вершин, называются сегментами. Пересечения блока с ограничивающими сферами представляют собой сферические многоугольники, при этом пересечение с нижней (для блока) сферой называется подошвой. Предполагается, что вне блоковой структуры могут находиться граничные блоки, примыкающие к внешним сегментам. Другая возможность состоит в рассмотрении блоковой структуры, замкнутой на сфере. Для учета неоднородности литосферы предусмотрена возможность задания различных глубин (в пределах  $H$ ) для разных блоков и учета зависимости вязко-упругих свойств разлома от его глубины. Все блоки считаются абсолютно жесткими, а их смещения — бесконечно малыми по сравнению с линейными размерами, поэтому геометрия блоковой структуры не меняется в процессе моде-

---

\* Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН № 15 «Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы» при поддержке УрО РАН (проект 12-П-1-1023) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6512.2012.1).

лирования, и структура не движется как единое целое. Блоки имеют шесть степеней свободы; смещение каждого блока состоит из поступательной и вращательной компонент. Предполагается, что законы движения граничных блоков и подстилающей среды известны, при этом движение описывается как вращение на сфере, т.е. задаются положение оси вращения и угловая скорость.

Жесткость блоков приводит к тому, что деформации имеют место только на разломах и подошвах блоков; силы возникают на подошвах из-за смещения блоков относительно подстилающей среды и на поверхностях ограничивающих их разломов из-за смещений соседних блоков или их подстилающей среды. Приведем формулы для определения упругой силы  $(f_t, f_l, f_n)$ , действующей на единицу площади разлома:

$$f_t = K_t(\Delta_t - \delta_t), \quad f_l = K_l(\Delta_l - \delta_l), \quad f_n = K_n(\Delta_n - \delta_n). \quad (1)$$

Здесь  $(t, l, n)$  — система координат, связанная с точкой приложения силы (оси  $t, l$  лежат в плоскости, касательной к поверхности разлома, ось  $n$  ей перпендикулярна);  $\Delta_t, \Delta_l, \Delta_n$  — компоненты относительного смещения в системе  $(t, l, n)$  соседних блоков в случае, если точка принадлежит части разлома, разделяющей блоки, или блока и подстилающей среды соседнего блока в случае, если точка принадлежит части разлома, отделяющей блок от подстилающей среды соседнего блока;  $\delta_t, \delta_l, \delta_n$  — соответствующие неупругие смещения, зависимость от времени которых описывается уравнениями

$$\frac{d\delta_t}{dt} = W_t f_t, \quad \frac{d\delta_l}{dt} = W_l f_l, \quad \frac{d\delta_n}{dt} = W_n f_n. \quad (2)$$

Коэффициенты  $K_t, K_l, K_n$  (1), характеризующие упругие свойства разлома, и коэффициенты  $W_t, W_l, W_n$  (2), характеризующие вязкие свойства разлома, могут быть различными для разных разломов и, кроме того, могут изменяться в зависимости от глубины.

Аналогично выглядят формулы для вычисления сил и неупругих смещений на подошвах блоков. Смещения любого внутреннего блока и углы его поворотов находятся из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих на блок, и суммарного момента этих сил. Это условие обеспечивает состояние квазистатического равновесия системы и одновременно является условием минимума энергии. Поскольку в рассматриваемой модели зависимость сил от смещений и поворотов блоков является линейной (явные формулы опущены ввиду их громоздкости, см. [3]), то система уравнений для определения этих величин также линейна и имеет вид

$$Aw = b. \quad (3)$$

Компонентами неизвестного вектора  $w = (w_1, w_2, \dots, w_{6n})$  являются смещения и углы поворота внутренних блоков ( $n$  — число таких блоков). Элементы матрицы  $A$  (размерности  $6n \times 6n$ ) не зависят от времени и могут быть вычислены один раз в начале процесса. Для подсчета различных криволинейных интегралов выполняется дискретизация (разбиение на ячейки) сферической поверхности подошв блоков и сегментов разломов, при этом предполагается, что значения сил и неупругих смещений совпадают для всех точек ячейки. Система (3) решается в дискретные моменты времени  $t_i$ .

В каждый момент  $t_i$  при вычислении компонент силы, действующей на разломе, определяется безразмерная величина  $\kappa$ , трактуемая как модельное напряжение:

$$\kappa = \frac{\sqrt{f_t^2 + f_l^2}}{P - f_n}. \quad (4)$$

Здесь  $P$  — одинаковый для всех разломов параметр, который может интерпретироваться как разность между литостатическим и гидростатическим давлением. Таким образом, фактически величина  $\kappa$  является отношением модуля силы, стремящейся сдвинуть блоки вдоль разлома, к модулю силы, прижимающей блоки друг к другу. Для каждого разлома задаются значения трех порогов прочности, вообще говоря, зависящие от времени:

$$B > H_f \geq H_s, \quad B = B(t_i) = B_0(t_i) + \sigma X(t_i), \quad H_f = H_f(t_i) = aB(t_i), \quad H_s = H_s(t_i) = bB(t_i). \quad (5)$$

Для всех  $i$  выполняется:  $0 < B_0(t_i) < 1$ ,  $0 < \sigma \ll 1$ ,  $X(t_i)$  — случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону  $N(0; 1)$ ,  $0 < a < 1$ ,  $0 < b \leq a$ . Предполагается, что начальные условия таковы, что неравенство  $\kappa < B$  имеет место во всех ячейках структуры. Взаимодействие между блоками (между блоком и соседней подстилающей средой) полагается вязкоупругим (нормальное состояние) до тех пор, пока величина  $\kappa$  (4) на части разлома, разделяющего элементы структуры, не достигает заданного порога  $B$ . Такая ситуация интерпретируется как землетрясение. В ячейках, попавших в «критическое» состояние, в соответствии с законом сухого трения, происходит резкий сброс напряжения посредством изменения значений неупругих смещений  $\delta_i$ ,  $\delta_l$ ,  $\delta_n$  по формулам:

$$\delta_i^e = \delta_i + \gamma_i^e f_i, \quad \delta_l^e = \delta_l + \gamma_l^e f_l, \quad \delta_n^e = \delta_n + \gamma_n^e f_n, \quad (6)$$

где  $\delta_i, f_i, \delta_l, f_l, \delta_n, f_n$  — значения неупругих смещений и компонент вектора силы непосредственно перед землетрясением. Коэффициенты  $\gamma_i^e, \gamma_l^e, \gamma_n^e$  вычисляются таким образом, чтобы для нового значения модельного напряжения  $\kappa$  было справедливо равенство  $\kappa = H_f$ . После описанных выше пересчетов находится правая часть системы (3), затем определяются векторы сдвига и углы поворота блоков. Если вновь в какой-либо ячейке  $\kappa \geq B$ , то вся процедура повторяется. Когда во всех ячейках на разломах  $\kappa < B$ , вычисления продолжаются по обычной схеме. Считается, что ячейки, в которых произошли землетрясения, находятся в состоянии крипа. Это означает, что для них в уравнениях (2) для вычисления значений неупругих смещений используются параметры  $W_i^s$  ( $W_i^s \gg W_i$ ),  $W_l^s$  ( $W_l^s \gg W_l$ ) и  $W_n^s$  ( $W_n^s \gg W_n$ ), обеспечивающие значительно более быстрый, по сравнению с нормальным состоянием, рост неупругих смещений и, следовательно, уменьшение значений сил и напряжений. Состояние крипа продолжается до тех пор, пока  $\kappa > H_s$ , после чего ячейка возвращается в нормальное состояние с использованием при расчетах  $W_i$ ,  $W_l$  и  $W_n$ .

Основным результатом процесса моделирования является искусственный каталог землетрясений. Принадлежащие одному разлому ячейки, в которых произошло землетрясение в момент времени  $t_i$ , объединяются в одно событие. Географические координаты его эпицентра и глубина вычисляются как взвешенные суммы координат и глубин ячеек (вес ячейки определяется как отношение ее площади к сумме площадей всех ячеек, вовлеченных в землетрясение). Взвешенная сумма векторов  $(\gamma_i^e f_i, \gamma_l^e f_l)$  добавок к неупругим смещениям  $\delta_i$  и  $\delta_l$  при пересчете по формулам (6) аппроксимирует случившуюся подвижку блоков вдоль разлома, и позволяет определить механизм модельного события. Механизм землетрясения — важная его характеристика, информирующая о процессе распространения различных сейсмических волн от очага. В зависимости от направления подвижки и угла наклона разлома принято выделять следующие основные механизмы: сдвиг, сброс и взброс; в новой версии модели магнитуда землетрясения вычисляется в зависимости от его механизма с использованием известных в сейсмологии эмпирических формул

$$M = D \lg S + E, \quad (7)$$

где  $S$  — сумма площадей ячеек (в  $\text{км}^2$ ),  $D = 1.02$ ,  $E = 3.98$  для сдвига,  $D = 1.02$ ,  $E = 3.93$  для сброса,  $D = 0.90$ ,  $E = 4.33$  для взброса.

Отметим, что модель дополнительно позволяет получить картину мгновенной кинематики блоков и информацию о характере их взаимодействия вдоль границ.

## 2. Динамическое перераспределение нагрузки

Вычислительные эксперименты показали, что сферическая блоковая модель допускает эффективное распараллеливание на основе стандартной схемы «мастер-рабочий» [3] с единым загрузочным MPI-модулем. На каждом шаге дискретного времени наиболее трудоемкими процедурами являются сохранение информации о модельных событиях и, главным образом, определение значений сил, неупругих смещений и напряжений (1), (2), (4)–(6) во всех ячейках структуры (так, в расчетном типовом варианте для глобальной системы тектонических плит,

покрывающих всю поверхность Земли [3–5], имеем около 200000 ячеек на подошвах 15 блоков и около 3500000 ячеек на сегментах 199 разломов). Основные вычисления могут быть проведены независимо друг от друга, поэтому они должны быть равномерно распределены между процессорами. Подробное описание параллельного алгоритма и некоторых его характеристик (ускорения, эффективности, масштабируемости, характера межпроцессорных коммуникаций) приведено в [4, 5]. Отметим, что основным фактором, негативно влияющим на качество распараллеливания, является то, что равные порции ячеек на всех процессорах обеспечивают равные объемы вычислений только при отсутствии землетрясений. В случае интенсивного потока модельных землетрясений нагрузка на процессоры становится существенно неравномерной (ввиду неравномерного распределения сейсмичности по разломам), что уменьшает эффективность.

Серия новых вычислительных экспериментов по изучению влияния случайных факторов в порогах прочности (5) на модельную сейсмичность подразумевает расчет большого числа однотипных вариантов для последующего усреднения результатов, а также увеличение объема передаваемой рабочими процессорами мастеру информации в связи с определением механизма модельного события. По этой причине задача уменьшения времени счета выходит на первый план. Предлагается ее решать с помощью динамической оптимизации вычислительной нагрузки процессоров непосредственно на стадии моделирования. Фактически речь идет о перераспределении порций ячеек пространственной дискретизации сегментов, поскольку объем вычислений на подошвах блоков от времени не зависит, так как модельные землетрясения происходят только на разломах. Перераспределение будем осуществлять после выхода модельного потока событий на так называемый стационарный режим, когда стабилизируется среднее количество землетрясений на единицу времени в большинстве сейсмоактивных зон (обычно это происходит по истечении первых 50–70 единиц модельного времени). Основным входом алгоритма служит информация о распределении ячеек, вовлеченных в землетрясения (будем говорить далее «разорванных»), по сегментам на некотором тестовом временном интервале, длина которого зависит от варианта. Опираясь на стационарность потока, мы предполагаем, что распределение таких ячеек на следующих промежутках той же длины будет аналогичным. Идея алгоритма состоит в том, чтобы перераспределить ячейки между процессорами с учетом количества разорванных и нормальных ячеек на тестовом промежутке и соотношения времен обработки ячеек разных типов (очевидно, разорванная ячейка обрабатывается дольше, чем нормальная, ввиду пересчетов (1), (4), (6)).

Формализуем указанную эмпирическую процедуру. Введем величины  $p_1$  и  $p_2$  ( $p_2 \geq p_1$ ) — времена обработки одной ячейки, соответственно, в нормальном состоянии и разорванной. Для каждого сегмента рассмотрим взвешенную сумму

$$S_i = p_1 N_i + (p_2 - p_1) \bar{N}_i / m, \quad (8)$$

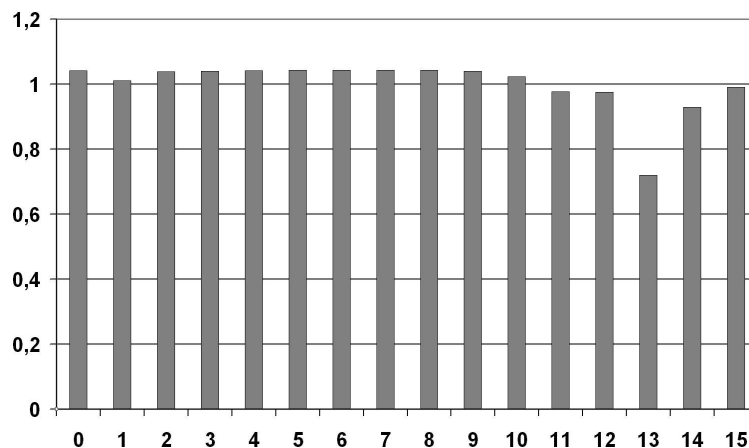
где  $i$  — номер сегмента,  $i=1, \dots, k$  ( $k$  — количество сегментов в структуре),  $N_i$  — количество ячеек дискретизации на  $i$ -м сегменте,  $\bar{N}_i$  — количество ячеек на  $i$ -м сегменте, разорванных в течении  $m$  временных шагов, составляющих тестовый промежуток. Эта сумма является аппроксимацией среднего времени обработки всех ячеек сегмента на одном шаге модельного времени. Тогда величину

$$S_* = \sum_{i=1}^k S_i / n, \quad (9)$$

можно трактовать как идеальное время обработки ячеек на каждом из  $n$  процессоров при равномерной вычислительной нагрузке. Теперь остается разбить все ячейки структуры на одинаковые в смысле времени обработки порции между процессорами. Накопление ячеек в порции для процессора  $j$  происходит с учетом величин из (8) до тех пор, пока сумма типа (8) на процессоре не достигнет  $S_*$ , после чего происходит переход к формированию следующей,  $(j+1)$ -й, порции. Отметим, что, поскольку удобнее делить ячейки на порции без разрыва слоя по глупине, то возможны незначительные отклонения от  $S_*$ .

Приведем пример, иллюстрирующий описанный метод. Моделирование сейсмичности глобальной системы тектонических плит проводилось в Институте математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург) на гибридном вычислителе кластерного типа «Уран» (состоит из 208 вычислительных узлов, каждый из которых оснащен двумя четырехядерными процессорами

Intel Xeon, работающими на частоте 3.0 ГГц, и 16–32 Гб оперативной памяти; имеет пиковую производительность порядка 20 Тфлопс). Вычислительные эксперименты показали, что отношение  $p_2/p_1$ , характеризующее длительность обработки разорванной ячейки по сравнению с нормальной, колеблется от 1.2 до 1.5 в зависимости от процессора и варианта. Оказалось, что информации о состоянии ячеек сегментов структуры за 500 шагов модельного времени после выхода потока событий на стационарный режим (интервал [100, 105], шаг дискретизации 0.01) достаточно для того, чтобы алгоритм (8), (9) перераспределил ячейки на новые порции с уменьшением времени счета на последующих интервалах. При равномерном распределении по 16 процессорам (на каждый попадает около 217750 ячеек) на тестовом интервале результат перераспределения для  $p_2/p_1 = 1.25$  схематично показан на Рис. 1.



**Рис. 1.** Результат перераспределения ячеек между 16 процессорами для  $p_2/p_1 = 1.25$ ; горизонтальная ось — номер процессора, вертикальная ось — величина порции, попавшей на процессор; единица соответствует порции при равномерном распределении

В Табл. 1 приведены усредненные времена счета с равномерным ( $p_2/p_1 = 1$ ) и неравномерным ( $p_2/p_1 = 1.25$ ) распределением ячеек на разном количестве процессоров как для самого тестового интервала [100, 105], так и для следующего [105, 110]. Очевидно, что именно данные для второго интервала являются информативными для оценивания качества работы алгоритма. Отметим, что несмотря на незначительное уменьшение времени счета согласно Табл. 1 (до 10%), в целом имеем позитивный результат, так как, во-первых, и такое улучшение важно при расчетах больших вариантов (до 1000 единиц модельного времени), а во-вторых, других резервов для оптимизации распараллеливания блоковой модели не просматривается.

**Таблица 1.** Времена счета (сек) с равномерным и неравномерным распределением ячеек по  $n$  процессорам

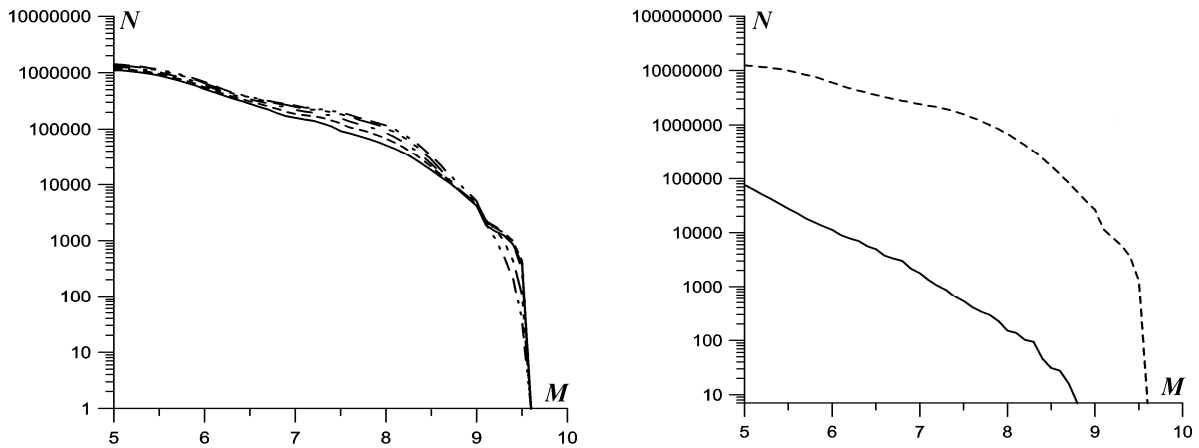
$n$	$T_{[100,105]}^1$	$T_{[100,105]}^{1.25}$	$T_{[105,110]}^1$	$T_{[105,110]}^{1.25}$
16	1172	1054	971	939
32	589	539	573	536
64	347	341	340	334
96	296	268	300	267
128	238	219	230	213

### 3. «Большой» вычислительный эксперимент

Благодаря новым возможностям распараллеливания, описанным в предыдущем разделе, проведено несколько достаточно времяяких экспериментов с аппроксимацией глобальной системы тектонических плит: 1) по использованию случайных значений для порогов прочности

(5); 2) по получению модельного каталога на длинном (по сравнению со всеми предыдущими) временном интервале. Представим некоторые результаты 2-го эксперимента.

Время счета одного варианта до 1000 единиц модельного времени на 64 процессорах МВС «Уран» составило 24 часа, размер файла с информацией о землетрясениях — 320 Гб. Анализируются прежде всего параметры закона Гутенберга–Рихтера, характеризующего распределение землетрясений по магнитуде.



**Рис. 2.** Графики повторяемости, построенные по пяти модельным каталогам длиной 100 единиц (левый рисунок), по реальному (NEIC [6], события с магнитудой не менее 5.0, период 01.01.1900–31.12.2011, сплошная линия) и модельному (1000 единиц безразмерного времени, штриховая линия) каталогам (правый рисунок);  $N$  — аккумулярованное число землетрясений,  $M$  — магнитуда

Почти совпадающие графики на левой части Рис. 2 свидетельствуют об установившейся стационарности потока событий, графики на правой части — о хорошем приближении угла наклона графика реальной глобальной сейсмичности, что подтверждает гипотезу об улучшении свойств искусственной сейсмичности на длительном интервале времени вследствие выхода модельного потока событий на стационарный режим. Кроме того, «почти параллельность» реального и модельного графиков повторяемости в области больших магнитуд говорит об идентичности распределений землетрясений по магнитуде в данном интервале и, следовательно, о возможности изучения реальных закономерностей по «длинному» модельному каталогу.

## Литература

1. Gabrielov A.M., Newman W.I. Seismicity Modeling and Earthquake Prediction: a Review // *Geophysical Monograph* 83, IUGG. 1994. Vol. 18. P. 7-13.
2. Keilis-Borok V.I., Soloviev A.A. (Eds.) *Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction*. Springer, 2003. 337 p.
3. Мельникова Л.А., Розенберг В.Л. Сферическая блоковая модель динамики и сейсмичности литосферы: различные модификации и вычислительные эксперименты // *Труды ИММ УрО РАН*. 2007. Т. 13. №3. С. 95-120.
4. Розенберг В.Л., Мельникова Л.А. Применение параллельных технологий к моделированию глобальной сейсмичности // *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2010)*: Тр. междунар. конф. Челябинск, 2010. ISBN 978-5-696-03987-9. С. 311-321.
5. Мельникова Л.А., Розенберг В.Л. Высокопроизводительные вычисления в моделировании динамики и сейсмичности систем тектонических плит. // *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2012)*: Тр. междунар. конф. Новосибирск, 2012. ISBN 978-5-696-04237-4. С. 248-259.
6. Global Hypocenters Data Base, NEIC/USGS. Denver, CO. URL: <http://earthquake.usgs.gov/regional/neic/> (дата обращения: 1.09.2012).