

Решение нестационарных задач двухфазной гравитирующей среды с применением суперкомпьютеров: проблемы и результаты *

О.П. Стояновская, В.Н. Снытников

Учреждение РАН Институт катализа им. Г.К.Борескова СО РАН

Проведено численное моделирование образования планетезималей и планет - газовых гигантов в околозвездных дисках. Воспроизведен процесс образования коллапсирующих сгустков в гравитирующей среде диска. Гибридная модель эволюции неустойчивого околозвездного диска состоит из уравнений газовой динамики, уравнения Власова для бесстолкновительной компоненты, уравнений для самосогласованного гравитационного поля. Разработанный код позволил рассчитать нелинейные режимы развития неустойчивостей массивного диска. Дальнейшее развитие кода, направленное на расчеты локальных гравитационных коллапсов, связывается с необходимостью значительного увеличения численного разрешения.

1. Введение

Механизм образования в околозвездных дисках планетезималей и планет — газовых гигантов является актуальной проблемой астрофизики.

Гравитационная неустойчивость — механизм, в рамках которого ищется объяснение наиболее загадочным аспектам эволюции планетных систем: формированию газовых гигантов и укрупнению метровых тел до километровых планетезималей. Такой механизм подразумевает образование крупных тел в результате коллапсирования газопылевых сгустков, формирующихся в диске за счет развития гравитационной неустойчивости. Эти коллапсы описываются сингулярными решениями в задачах динамики двухфазной гравитирующей среды.

К настоящему моменту описано несколько режимов формирования сгущений в массивных дисках [1–3]. Однако не получены ответы на ключевые вопросы: Какие условия во вращающейся среде из газа и первичных тел приводят к формированию коллапсирующих сгустков? Возникают ли в околозвездном диске такие условия? Какова будет функция распределения по массам тел, сформированных в коллапсирующих сгустках, в околозвездном диске?

В работе представлены результаты численного моделирования образования планетезималей и планет — газовых гигантов. Воспроизводится процесс образования коллапсирующих сгустков в гравитирующей среде диска (Рис.1). Эта среда состоит из газа и многочисленных метровых тел, которые двигаются с редкими столкновениями между собой на временах одного оборота вокруг протозвезды. Свыше 90 % массы диска принадлежит газовой компоненте.

*Работа выполнена при поддержке Программ Президиума РАН №28 (координаторы ак. Э.М.Галимов и ак. А.Ю.Розанов) и №21 (координатор ак. А.А.Боярчук), Интеграционного проекта СО РАН №130 (координатор ак. Б.Г.Михайленко).

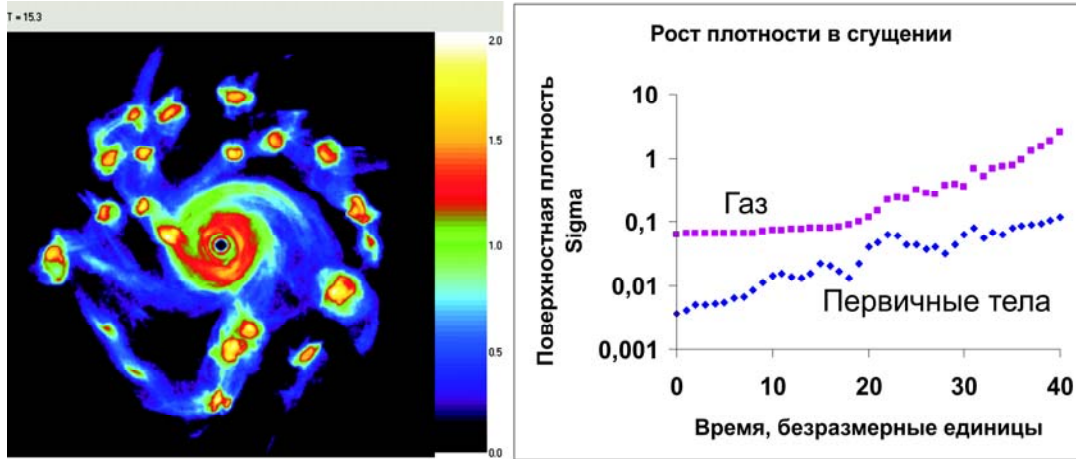


Рис. 1. Логарифм поверхностной плотности субдиска первичных тел в момент времени $T = 15.3$, отвечающий одному обороту периферии диска. Рост максимальной поверхностной плотности газа и субдиска первичных тел в сгущении.

2. Математическая модель субдиска околозвездного диска на этапе образования сгущений

2.1. Основные уравнения

Ввиду того, что толщина диска первичных тел существенно меньше его радиального размера, считается, что «твердая» компонента движется только в экваториальной плоскости системы. При этом в уравнениях газовой динамики используются поверхностные величины:

$$\sigma_{par,gas} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{par,gas} dz; \quad p^* = \int_{-\infty}^{+\infty} p dz.$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + div(\sigma \vec{v}) = 0; \quad \sigma \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sigma (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\nabla p^* - \sigma \nabla \Phi,$$

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) S^* = 0, \quad p^* = T^* \sigma.$$

Здесь \vec{v} — скорость газа, p^* — поверхностное давление газа, γ^* — эффективный показатель политропы для квазитрехмерного случая, связанный с показателем политропы γ соотношением $\gamma^* = 3 - \frac{2}{\gamma}$. $T^* = \frac{p^*}{\sigma}$; $S^* = \ln \frac{T^*}{\sigma \gamma^{*\gamma^* - 1}}$ — производные величины, аналогичные температуре и энтропии газа. Φ — гравитационный потенциал, в котором происходит движение.

Динамику субдиска первичных тел описывает уравнение Власова в пренебрежении столкновениями тел на временах нескольких оборотов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = 0,$$

где $\vec{a} = -\nabla \Phi$, \vec{a} — ускорение частиц во внешнем и самосогласованном поле, \vec{u} — скорость частиц, $f = f(t, \vec{r}, \vec{u})$ — функция распределения частиц по скоростям, связанная с поверхностной плотностью частиц соотношением $\sigma_{par} = \int f d\vec{u} dz$.

Φ — гравитационный потенциал, который представляет собой сумму потенциала неподвижного центрального тела и потенциала диска, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, $\Phi_1 = -\frac{M_c}{r}$, M_c — масса центрального тела. Φ_2 — потенциал самосогласованного гравитационного поля, который

определяется как решение смешанной задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi_2 = 0, \quad \Phi_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}|_{z=0} = 2\pi(\sigma_{par} + \sigma_{gas}).$$

Уравнения записаны в безразмерных переменных. Базовыми размерными величинами являются G — гравитационная постоянная, $R_0 = 10AE = 1.5 \cdot 10^{12}$ м, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг — характерный размер и масса системы.

2.2. Начальные условия

В начальный момент времени задаются поверхностные температура и плотность диска. Плотность газа и субдиска первичных тел взята в виде диска Маклорена массы $M_{par,gas}$ и радиуса R : $\sigma_{par,gas}(r) = \frac{3M_{par,gas}}{2\pi R^2} \sqrt{1 - (\frac{r}{R})^2}$. Температура газа в начальный момент времени определяется как $T^*(r) \sim \sigma(r)$ по заданной T_0 — температуре в центре диска.

Начальные скорости тел задаются в виде суммы регулярной и хаотической составляющих $\vec{u} = \vec{u}^{\vec{j}} + \vec{u}^{\vec{h}}$, где $\vec{u}^{\vec{j}}$ — регулярная, $\vec{u}^{\vec{h}}$ — хаотическая скорость. Скорость газа и регулярная скорость частиц определяются из условия равенства центробежной и центростремительной гравитационной сил: $\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $\frac{u_\phi'^2}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$, $v_r = 0$, $u_r' = 0$. Хаотическая скорость частиц $\vec{u}^{\vec{h}}$ задается по гауссову закону с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией v_d .

3. Численные методы и код Sombroero

Разработанный численный алгоритм решения системы уравнений общего вида основан на методе дробных шагов с расщеплением по физическим процессам. На каждом временном шаге решается уравнение Власова, система уравнений газовой динамики и смешанная задача для уравнения Лапласа.

Расчетная область представляет собой цилиндр, в нижнем сечении которого расположены модельные частицы. Радиус расчетной области в два раза превосходит начальный радиуса диска.

3.1. Решение уравнения Власова

Решение уравнения Власова осуществляется методом частиц в ячейках PIC. Для параллельной реализации метода применяется лагранжева декомпозиция области, поскольку модельные частицы движутся относительно независимо друг от друга, и их движение определяется только гравитационным потенциалом. Реализация требует пересылки плотности (двумерного массива), при этом процессоры взаимодействуют по схеме все-со-всеми. Методы распараллеливания процедур решения уравнения Власова и уравнения Лапласа, которые были реализованы в Sombroero, подробно описаны в работе [4].

3.2. Решение уравнения Лапласа

Для решения уравнения Лапласа используется комбинированный метод с итерациями, где в качестве начального приближения берется значение с предыдущего временного шага. В методе использовано быстрое преобразование Фурье по угловой координате вместе с процедурой блочной последовательной верхней релаксации. Параллельная реализация метода осуществляется через распределение по процессорам гармоник потенциала, полученных в результате дискретного преобразования Фурье. Затем необходима сборка всех гармоник потенциала на каждом процессоре. Это требует пересылки значений потенциала в экваториальной плоскости (двумерный массив), при котором взаимодействие процессоров

происходит по схеме все-со-всеми. Этот метод позволяет распараллелить вычисления на количество процессоров, представляющих собой степень 2.

3.3. Решение уравнений газовой динамики

Система уравнений газовой динамики решается методом SPH, который представляет собой ядерный свободно-лагранжев метод [5]. Сплошная среда заменяется дискретной системой плотно расположенных в пространстве частиц, являющихся носителями основных характеристик среды m, \mathbf{v}, E etc. Ключевой особенностью SPH-метода по сравнению с другими методами частиц является способ вычисления пространственных производных без использования сетки. С помощью сглаживающей функции (ядра) строится гладкий интерполянт характеристики среды на основе значений величин, дискретно определяемых в частицах. Операция дифференцирования применяется к интерполянту. Таким образом, динамика частиц определяется только информацией о положении частиц в системе. Расчетные формулы метода SPH, реализованные в Sombbrero [6], получаются из записанных в лагранжевом виде уравнений газовой динамики. В качестве ядра W мы использовали кубический сплайн для двумерного пространства. Поверхностная плотность газа, где расположена частица с номером i , вычисляется как интегральный (суммарный) интерполянт $\sigma_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}$, N — количество модельных SPH-частиц. Уравнение движения аппроксимируется таким образом, чтобы обеспечить сохранение линейного и углового моментов. Для предотвращения нефизического перемешивания со взаимным проникновением SPH-частиц друг сквозь друга в уравнение движения добавляется стандартная искусственная вязкость.

Отличие в распараллеливании метода частиц в ячейках для решения уравнения Власова и метода SPH для решения уравнений газовой динамики состоит в том, что динамика SPH-частицы определяется не только гравитационным потенциалом, но и градиентом давления, который зависит от параметров ее «соседей». Для распараллеливания SPH - кодов применяется как лагранжева, так и эйлерова декомпозиция области, в зависимости от того, каким будет движение SPH - частиц и как организуется поиск «соседей» частицы. Так при эйлеровой декомпозиции области легко распараллелить поиск соседей, но трудно обеспечить равномерную загрузку процессоров и минимизировать межпроцессорные коммуникации, поскольку частицы должны быть перемещены с одного процессора на другой. При лагранжевой декомпозиции области, напротив, минимизируется количество межпроцессорных коммуникаций и естественным образом обеспечивается равномерность загрузки процессоров, однако трудности начинают представлять эффективная организация поиска соседей. Кроме этих двух подходов используется «operational-based» подход, который подразумевает хранение всех данных на всех процессорах и распараллеливание только наиболее трудоемких с вычислительной точки зрения процедур [5]. Преимуществами подхода являются простота программной реализации и естественное обеспечение равномерной загрузки процессоров. К недостаткам относятся высокие требования к памяти и эффективность только для небольшого количества процессоров.

В таблице 1 приведены данные о времени выполнения отдельных процедур SPH-подпрограммы для разного количества частиц. Для поиска соседей использовалась одна и та же неподвижная сетка с размером ячейки 0.005. Количество соседей каждой частицы поддерживалось на уровне 50. Видно, что наиболее трудоемкой является процедура вычисления сумм для определения правых частей в уравнениях движения SPH-частиц.

В SPH-подпрограмме кода Sombbrero применялся «operational-based» подход с распараллеливанием процедуры вычисления сумм и пересылкой рассчитанных значений массивов. При вычислении ускорений каждый процессор с номером j определял значения массивов только в диапазоне $[NMIN_j, NMAX_j]$; а затем осуществлялась пересылка насчитанных значений массивов по всем остальным процессорам. В силу того, что

Таблица 1. Время счета(сек) на AMD Athlon 2.41 ГГц, 1.87 Гб отдельных процедур SPH-подпрограммы

Количество частиц	2500	10 000	40 000	160 000
Вычисление сумм	0.11	0.41	1.66	6.34
Сортировка	0.26	0.36	0.78	2.5
Всего	0.37	0.77	2.59	8.93

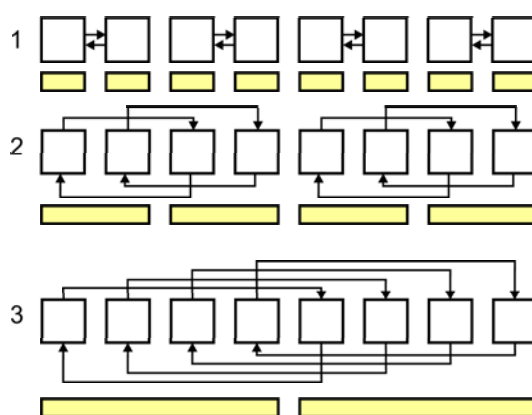


Рис. 2. Редукционная схема пересылки массивов

число используемых процессоров всегда равно 2^k , для пересылки массивов используется редукционная схема, которая приведена на Рис. 2. На первом шаге насчитанными данными обмениваются «соседние» процессоры 0 и 1, 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7. В результате обмена в группе процессоров 0 и 1 оказываются одинаковые данные в ячейках массивов $[NMIN_0, NMAX_1]$, аналогично в группе 2 и 3 $[NMIN_2, NMAX_3]$ и так далее. На втором шаге происходит пересылка массивов увеличенной длины, при этом данными обмениваются процессоры 0 и 2, 1 и 3. Пересылка одинаковых значений выполняется параллельно, в результате обмена на всех процессорах 0, 1, 2 и 3 оказываются одинаковые данные в ячейках массивов $[NMIN_0, NMAX_3]$. Аналогичный обмен происходит между процессорами 4 и 6, 5 и 7. На третьем шаге обмен обновленными значениями массивов происходил между процессорами 0 и 4, 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, в результате которого все насчитанные данные оказались переданы на все процессоры. Эта схема позволяет сократить количество коммуникаций каждого процессора с $2^k - 1$ до k .

Параллельные алгоритмы были реализованы с использованием библиотеки MPI. Расчеты проводились на кластере Itanium2 Сибирского суперкомпьютерного центра и на кластере МВС-100 Московского суперкомпьютерного центра.

Максимальная эффективность распараллеливания составляет 0.8 и достигается на 2 процессорах, с увеличением числа процессоров эффективность снижается. Максимальное достигнутое ускорение составляет 3.5 и достигается на 32 процессорах.

3.4. Тестирование кода

В вычислительных экспериментах для контроля правильности решений проверяется выполнение законов сохранения основных физических величин: массы, импульса, полной энергии, момента импульса, а также сохранение центра масс системы. Применимость

реализованных методов для решения интересующего нас класса задач исследовалась в том числе при моделировании динамики осесимметричных и радиально-азимутальных возмущений, распространяющихся в двухфазной среде гравитирующего диска. Путем сравнения результатов вычислительных экспериментов, проведенных с использованием SPH и FLIC методов, показана способность метода SPH воспроизводить нелинейные волны в среде газа и бесстолкновительных тел при возникновении в системе сдвиговых и встречных течений [6].

4. Результаты моделирования

Разработанная версия программы позволила получить нелинейные режимы развития неустойчивостей массивного диска. Нами воспроизведено такое развитие «двухфазной» гравитационной неустойчивости, в результате которой появляются сингулярные решения. Эти решения связаны с коллапсированием сгустков из газа и тел (см. Рис.1). В расчете, представленном на Рис.1, мы воспроизводили динамику диска массы $M = 0.51M_{\odot}$ и радиуса $R = 2R_0 = 20AE$, вращающегося вокруг центрального тела массы $M_c = 1M_{\odot}$. В начальный момент времени задавалась дисперсия первичных тел по скоростям $v_d = 0.1$, масса частиц составляла $M_{par} = 0.01M_{\odot}$, температура газа в центре для эксперимента 1 составляла $T_0 = 0.004$. В этом расчете эффективный показатель адиабаты $\gamma^* = \frac{5}{3}$.

В вычислительных экспериментах мы показали, что самогравитирующие сгущения в двухфазном массивном диске могут быть сформированы в результате развития «двухфазной» неустойчивости, когда на динамику массивного газа оказывает свое влияние маломассивный субдиск первичных тел при их коллективном движении без столкновений друг с другом. На Рис.3 приведены результаты расчетов динамики диска с одними и теми же параметрами массивной компоненты диска - газа, но с изменением параметра субдиска первичных тел v_d . Видно, что при значении $v_d = 0.01$ в диске наблюдается формирование отдельных сгустков, тогда как при $v_d = 0.2$ появляются только спиральные рукава, не разваливающиеся на сгустки.

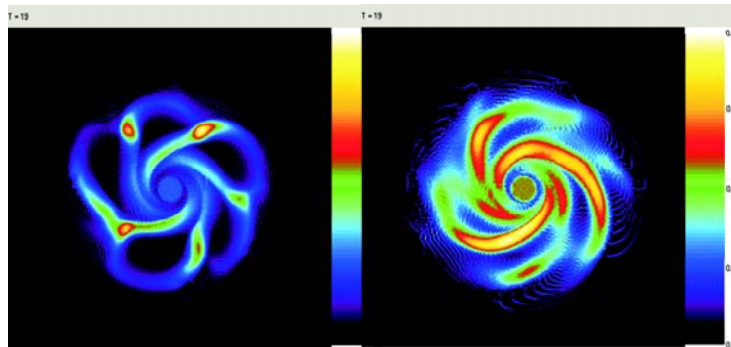


Рис. 3. Поверхностная плотность газа в момент времени $T = 22$. $T = 15$ соответствует полному обороту периферийной части диска. Слева - расчет динамики диска с заданным значением $v_d = 0.01$, справа - с заданным значением $v_d = 0.2$. Расчет на сетке $100 \times 128 \times 100$, 5 000 000 PIC частиц, 40 000 SPH частиц, $\tau = 0.001$

Из приведенного вывода следует, что возможность формирования сгущений в условиях диска определяется характеристиками как газа, так и твердой фазы. Влияние темпа охлаждения газа и перераспределения его плотности на формирование структур в околозвездных дисках исследуется в ряде работ [1, 3]. Наши результаты показывают, что формирование сгустков может определяться также темпом концентрации крупных (более 1 м) первичных тел в субдиске и темпом снижения дисперсии их скоростей (охлаждения первичных тел).

Для исследования спектра масс крупных тел, получающихся в сгустках, необходимо более чем на порядок увеличить численное разрешение модели. На Рис.4 показано более детальное воспроизведение отдельных стадий развития неустойчивости при увеличении количества модельных частиц и ячеек сетки. Однако дальнейшее увеличение числа модельных частиц и ячеек сетки без изменения алгоритма сталкивается с комплексом ограничений на действующих суперкомпьютерах. Поэтому получение новых физических результатов требует развития кода. Предполагается применение техники многомасштабного моделирования, увеличение количества модельных частиц, а также введение особого типа частиц «sink-particle» при расчете локальных коллапсов в отдельных сгустках вещества.

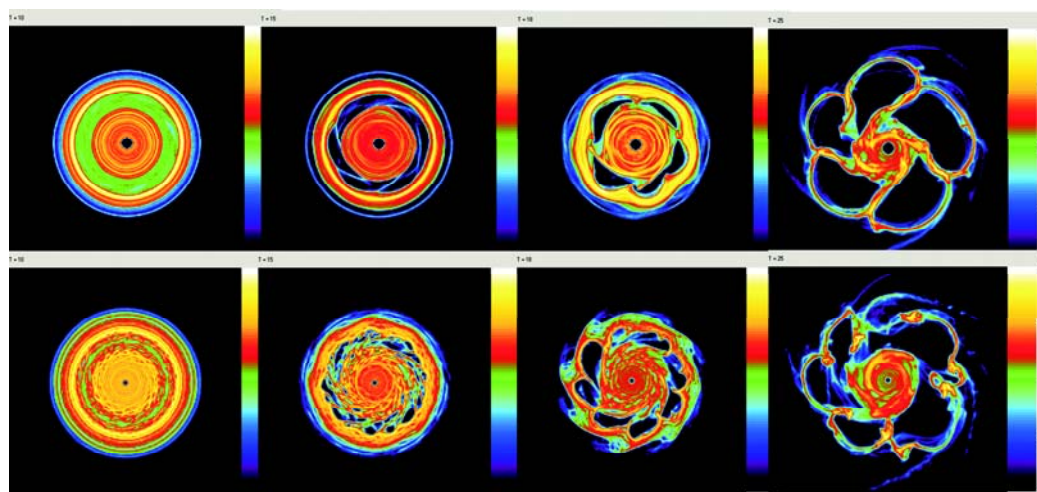


Рис. 4. Логарифм поверхностной плотности субдиска первичных тел в моменты времени $T = 10; 15; 18; 25$. $T = 15$ соответствует полному обороту периферийной части диска. Верхний ряд - расчет на сетке $100 \times 128 \times 100$, 5 000 000 PIC частиц, 40 000 SPH частиц, $\tau = 0.001$; нижний ряд - расчет на сетке $200 \times 256 \times 200$, 10 000 000 PIC частиц, 160 000 SPH частиц, $\tau = 0.0005$

Литература

1. Boss A.P. Possible Rapid Gas Giant Planet Formation In The Solar Nebula And Other Protoplanetary Disks // The Astrophys. Journal. 2000. Vol. 536. PL.101–104.
2. Meru F., Bate M.R. Exploring the conditions required to form giant planets via gravitational instability in massive protoplanetary discs // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. Vol.406, Is.4 P.1060-1072.
3. Rice, W.K.M, Lodato, G., Pringle J.E., Armitage P.J., Bonnell I.A. Planetesimal formation via fragmentation in self-gravitating protoplanetary discs // Mon.Not.R.Astron.Soc. 2006. Vol.372. P.9-13.
4. Вшивков В.А., Кукшева Э.А., Никитин С.А., Снытников А.В., Снытников В.Н. О параллельной реализации численной модели физики гравитирующих систем // Автометрия. 2003. Т.39, №3. С.115-123.
5. Liu G.R., Liu M.B. Smoothed Particle Hydrodynamics, a meshfree particle method. World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 2007.
6. Стояновская О.П., Снытников В.Н. Особенности SPH-метода решения газодинамических уравнений для моделирования нелинейных волн в двухфазной гравитирующей среде // Математическое моделирование. 2010. Т.22, № 5. С.29-44.