

Численное решение 2.5-D динамической задачи сейсмологии с использованием алгоритмов распараллеливания*

Б.Г. Михайленко, А.А. Михайлов

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН

В настоящем докладе рассматривается эффективный алгоритм распараллеливания численного решения системы линейаризованных уравнений для 2.5-D динамической задачи сейсмологии. Предлагаемый алгоритм основан на использовании комплексирования конечных интегральных преобразований Фурье и Лагерра с конечно-разностным методом решения преобразованной задачи. Исходная система записывается в виде гиперболической системы первого порядка в терминах вектора скоростей и тензора напряжений для трёхмерной Декартовой системы координат. Предлагаются два варианта распараллеливания расчетов и анализируются особенности их численной реализации. В докладе представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей, полученные в результате расчётов на многопроцессорном вычислительном комплексе.

1. Введение

При моделировании сейсмических волновых полей в неоднородных средах оказалось эффективным использование алгоритмов комплексирования интегральных преобразований по одной или двум пространственным переменным и временной координате с конечно-разностным методом решения полученных в результате преобразований задач. В настоящем докладе рассматривается эффективный алгоритм численного решения системы линейаризованных уравнений для 2.5-D динамической задачи сейсмологии основанный на применении интегрального преобразования Лагерра по временной координате. Этот метод можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье преобразования, где вместо частоты ω мы имеем параметр m - степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [1, 2], а затем развит для задач вязкоупругости [3, 4] и теории пористых сред [5]. В указанных работах рассмотрены отличительные особенности данного метода от принятых подходов и обсуждаются преимущества применения интегрального преобразования Лагерра в отличии от разностного метода и Фурье преобразования по времени. Целью данной статьи является представление алгоритма эффективного распараллеливания расчетов на основе данного подхода к решению 2.5-D динамической упругой задачи сейсмологии.

В рассматриваемой постановке задачи исходная система записывается в виде гиперболической системы первого порядка в терминах вектора скоростей и тензора напряжений для трёхмерной Декартовой системы координат. При этом полагается, что параметры среды (плотность и скорости продольных и поперечных волн) имеют зависимость только по двум координатам, а по третьей координате среда однородна. Данную постановку задачи принято называть 2.5-D задачей. Для решения поставленной задачи используются конечные интегральные косинус и синус преобразования Фурье по координате с постоянными параметрами среды и интегральное преобразование Лагерра по времени. В результате исходная задача сводится к решению N независимых (N - количество гармоник преобразования Фурье по пространственной координате) систем дифференциальных уравнений. Для их решения используется конечно-разностная аппроксимация производных по двум пространственным координатам на сдвинутых сетках с 4-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-05-00937)

ым порядком точности. В итоге, решение получаемых N независимых систем линейных алгебраических уравнений находится с помощью метода сопряжённых градиентов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим Декартову систему координат (x_1, x_2, x_3) в полупространстве $x_2 \geq 0$. Связь между компонентами напряжений и скоростями смещений для задачи распространения сейсмоакустических колебаний в упругой изотропной среде записывается как:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i f(t) \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{u} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь δ_{ij} - символ Кронекера, $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ - упругие параметры среды, $\rho(x_1, x_2)$ - плотность среды, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор скорости смещений, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений. Здесь F_1, F_2, F_3 - составляющие силы $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3$, описывающие распределение локализованного в пространстве источника, а $f(t)$ - заданный временной сигнал в источнике.

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_i|_{t=0} = \sigma_{ij}|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и граничных условиях на свободной поверхности в плоскости $x_2 = 0$

$$\sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma_{23}|_{x_2=0} = \sigma_{22}|_{x_2=0} = 0. \quad (3)$$

Полагаем, что функции $u_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ обладают достаточной гладкостью для применения всех последующих преобразований.

3. Алгоритм решения

На первом этапе решения для сведения поставленной задачи к серии задач меньшей размерности, воспользуемся конечными интегральными косинус-синус преобразованиями Фурье по пространственной координате, в направлении которой среда считается однородной. Для каждой компоненты системы введем соответствующее косинус или синус преобразование [6]:

$$\vec{W}(x_1, x_2, n, t) = \int_0^a \vec{W}(x_1, x_2, x_3, t) \begin{Bmatrix} \cos(k_n x_3) \\ \sin(k_n x_3) \end{Bmatrix} d(x_3), \quad (4)$$

с соответствующей формулой обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{\pi} \vec{W}_0(x_1, x_2, t) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \vec{W}(x_1, x_2, n, t) \cos(k_n x_3) \quad (5)$$

или

$$\vec{W}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \vec{W}(x_1, x_2, n, t) \sin(k_n x_3), \quad (6)$$

где $k_n = \frac{n\pi}{a}$.

В результате данного преобразования получим $N + 1$ независимых двумерных по пространству нестационарных задач. Далее к полученным таким образом задачам применим интегральное преобразование Лагерра по времени вида [1, 2]:

$$\vec{W}_m(x_1, x_2, n) = \int_0^\infty \vec{W}(x_1, x_2, n, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht), \quad (7)$$

с формулой обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, n, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}_m(x_1, x_2, n) l_m^\alpha(ht), \quad (8)$$

где $l_m^\alpha(ht)$ - функции Лагерра.

В результате преобразования по времени решение исходной задачи сводится к решению $N+1$ двумерных дифференциальных задач в спектральной области. Для решения каждой такой задачи применяем конечно-разностную аппроксимацию производных по двум пространственным координатам на сдвинутых сетках с 4-ым порядком точности [7].

Для этого в расчетной области введем в направлении координаты $z = x_1$ сетки ωz_1 и $\omega z_{1/2}$ с шагом дискретизации Δz , сдвинутые относительно друг друга на $\frac{\Delta z}{2}$:

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z, t), \quad \omega z_{1/2} = (x, j\Delta z + \frac{\Delta z}{2}, t), \quad j = 0, \dots, K.$$

Аналогично, введем в направлении координаты $x = x_2$ сетки ωx_1 и $\omega x_{1/2}$ с шагом дискретизации Δx , сдвинутые относительно друг друга на $\frac{\Delta x}{2}$:

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z, t), \quad \omega x_{1/2} = (i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, z, t), \quad i = 0, \dots, L.$$

На данных сетках введем операторы дифференцирования D_x и D_z , аппроксимирующие производные $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ с четвертым порядком точности по координатам $z = x_1$ и $x = x_2$:

$$D_x u(x, z) = \frac{9}{8\Delta x} \left[u(x + \frac{\Delta x}{2}, z) - u(x - \frac{\Delta x}{2}, z) \right] - \frac{1}{24\Delta x} \left[u(x + \frac{3\Delta x}{2}, z) - u(x - \frac{3\Delta x}{2}, z) \right],$$

$$D_z u(x, z) = \frac{9}{8\Delta z} \left[u(x, z + \frac{\Delta z}{2}) - u(x, z - \frac{\Delta z}{2}) \right] - \frac{1}{24\Delta z} \left[u(x, z + \frac{3\Delta z}{2}) - u(x, z - \frac{3\Delta z}{2}) \right].$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$u_y^m(x, z), \sigma_{xx}^m(x, z), \sigma_{yy}^m(x, z), \sigma_{zz}^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_1,$$

$$\sigma_{xy}^m(x, z), u_x^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_1,$$

$$\sigma_{yz}^m(x, z), u_z^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2},$$

$$\sigma_{xz}^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}.$$

Тогда конечно разностные уравнения, аппроксимирующие исходную задачу с четвертым порядком точности по пространственным переменным, запишутся в виде:

$$\frac{h}{2} u_{x,(i,j)}^m - \rho_{(i,j)}^{-1} \left(D_z \sigma_{xz}^m + D_x \sigma_{xx}^m + k_n \sigma_{xy}^m \right)_{(i,j)} = -h \sum_{p=0}^{m-1} u_{x,(i,j)}^p,$$

$$\frac{h}{2} u_{y,(i+1/2,j)}^m - \rho_{(i+1/2,j)}^{-1} \left(D_z \sigma_{yz}^m + D_x \sigma_{xy}^m - k_n \sigma_{yy}^m \right)_{(i+1/2,j)} = -h \sum_{p=0}^{m-1} u_{y,(i+1/2,j)}^p,$$

$$\frac{h}{2} u_{z,(i+1/2,j+1/2)}^m - \rho_{(i+1/2,j+1/2)}^{-1} \left(D_z \sigma_{zz}^m + D_x \sigma_{xz}^m + k_n \sigma_{yz}^m \right)_{(i+1/2,j+1/2)} = -h \sum_{p=0}^{m-1} u_{z,(i+1/2,j+1/2)}^p,$$

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2} \sigma_{xx,(i+1/2,j)}^m - \lambda_{(i+1/2,j)} (D_z u_z^m + k_n u_y^m)_{(i+1/2,j)} - (\lambda + 2\mu)_{(i+1/2,j)} D_x u_x^m_{(i+1/2,j)} &= -h \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_{xx,(i+1/2,j)}^p, \\
\frac{h}{2} \sigma_{yy,(i+1/2,j)}^m - \lambda_{(i+1/2,j)} (D_z u_z^m + D_x u_x^m)_{(i+1/2,j)} - k_n (\lambda + 2\mu)_{(i+1/2,j)} u_y^m_{(i+1/2,j)} &= -h \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_{yy,(i+1/2,j)}^p, \\
\frac{h}{2} \sigma_{zz,(i+1/2,j)}^m - (\lambda + 2\mu)_{(i+1/2,j)} D_z u_z^m_{(i+1/2,j)} - \lambda_{(i+1/2,j)} (D_x u_x^m + k_n u_y^m)_{(i+1/2,j)} &= -h \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_{zz,(i+1/2,j+1/2)}^p, \\
\frac{h}{2} \sigma_{xy,(i,j)}^m - \mu_{(i,j)} (D_x u_y^m + k_n u_x^m)_{(i,j)} &= -h \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_{xy,(i,j)}^p, \\
\frac{h}{2} \sigma_{xz,(i,j+1/2)}^m - \mu_{(i,j+1/2)} (D_z u_x^m - D_x u_z^m)_{(i,j+1/2)} &= -h \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_{xz,(i,j+1/2)}^p, \\
\frac{h}{2} \sigma_{yz,(i+1/2,j+1/2)}^m - \mu_{(i+1/2,j+1/2)} (D_z u_y^m + k_n u_z^m)_{(i+1/2,j+1/2)} &= -h \sum_{p=0}^{m-1} \sigma_{yz,(i+1/2,j+1/2)}^p,
\end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения $u_{x,(i,j)}^m = u_x^m(x_i, z_j)$. Для других компонент аналогично.

В результате конечно-разностной аппроксимации получим $N + 1$ систем линейных алгебраических уравнений. Представим искомым вектор решения \vec{W} в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\vec{W}(m) &= (\vec{V}_0(m), \vec{V}_1(m), \dots, \vec{V}_{K+L}(m))^T, \\
\vec{V}_{i+j} &= (u_x^{i,j}, u_y^{i+1/2,j}, u_z^{i+1/2,j+1/2}, \sigma_{xx}^{i+1/2,j}, \sigma_{yy}^{i+1/2,j}, \sigma_{zz}^{i+1/2,j}, \sigma_{xy}^{i,j}, \sigma_{xz}^{i,j+1/2}, \sigma_{yz}^{i+1/2,j+1/2})^T.
\end{aligned}$$

Тогда для каждой n -той гармоники ($n = 0, \dots, N$) система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как:

$$(A_\Delta + \frac{h}{2} E) \vec{W}(m) = \vec{F}_\Delta(m-1). \quad (9)$$

Последовательность компонент волнового поля в векторе решения \vec{V} выбирается с учетом минимизации количества диагоналей в матрице A_Δ . При этом на главной диагонали матрицы специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве множителя параметр h (параметр преобразования по Лагерру). Следует отметить, что за счет выбора параметра h имеется возможность существенно улучшать обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений (9) можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля $\vec{W}(m, n)$. Затем, воспользовавшись формулами обращения для Фурье преобразования (5), (6) и преобразования Лагерра (8), получим решение исходной задачи (1)-(3).

4. Аспекты численной реализации

В аналитических преобразованиях Фурье и Лагерра при определении значений функций по их спектру используются формулы обращения в виде сумм с бесконечным пределом. При численной реализации необходимым условием является определение требуемого количества членов суммируемого ряда для построения решения с заданной точностью. Так, например, количество гармоник в формулах обращения преобразования Фурье (5), (6) зависит от минимальной пространственной длины волны в моделируемой среде и размеров расчётной пространственной области восстанавливаемого поля, которая задаётся конечными пределами интегрального преобразования. Кроме того, скорость сходимости суммируемого ряда зависит от гладкости функций моделируемого волнового поля.

Количество гармоник по Лагерру, необходимых для определения функций по формуле (8), зависит от задаваемого сигнала в источнике $f(t)$, выбора параметра h и значения временного

интервала восстанавливаемого волнового поля. Как можно определить требуемое количество гармоник и выбрать оптимальное значение параметра h , подробно рассмотрено в работе [5].

Анализ численных расчетов показывает, что основная погрешность вычислений в представленном алгоритме решения поставленной задачи связана с численной аппроксимацией пространственных производных. Поэтому для разностной аппроксимации использовался четвертый порядок точности. Для более точного описания производных вблизи границ раздела сильноконтрастных слоев среды, а также более точного учета граничных условий лучше использовать разностную сетку с переменным шагом дискретизации. Таким образом можно уменьшать шаг разбиения сетки при аппроксимации производных на определенных участках среды, что позволяет получить решение с требуемой точностью при меньшем количестве узлов разностной сетки.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (9) наиболее эффективным оказалось использование итерационного метода сопряженных градиентов. В этом случае для матриц систем большой размерности не требуется хранение всей матрицы в машинной памяти. Преимуществом этого метода является также быстрая сходимость к решению задачи при условии хорошей обусловленности матрицы системы. Наша матрица как раз обладает этим свойством за счет введенного параметра h . Задав нужное значение h , можно существенно ускорить сходимость итерационного процесса. Выбор оптимального значения h , в этом случае, осуществляется исходя из минимизации количества гармоник Лагерра и уменьшения количества итераций требуемых для нахождения решения для каждой гармоники.

Использование преобразования Фурье по одной из пространственных координат для решения поставленной задачи позволяет реализовать эффективное распараллеливание решения. В этом случае на каждом процессоре будет решаться независимая задача для каждой гармоники Фурье-преобразования. Дополнительно, при проведении расчётов на кластерных вычислительных комплексах с малым объёмом оперативной памяти доступной одному процессору, для решения больших пространственных задач (более 100 длин волн) осуществлено распараллеливание решения двумерной пространственной задачи. На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряженных градиентов для решения системы алгебраических уравнений для каждой гармоники Фурье. На уровне входных данных при задании модели среды это равносильно декомпозиции исходной области на несколько подобластей двумерной задачи. Такой подход даёт возможность распределения памяти, как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях. Схематическое разбиение области решаемой задачи показано на **Рис. 1**.



Рис. 1. Схема распределения расчётной области (n, x, z) по процессорам

5. Результаты численных расчетов

Для тестовых расчетов при моделировании волнового поля использовалась ограниченная область среды размерностью $(x, y, z) = (2 \text{ км}, 2 \text{ км}, 1.5 \text{ км})$. Заданная модель среды состоит из двух однородных слоёв разделенных криволинейной границей в плоскости XZ в виде углового выступа. Глубина залегания границы на отрезке $[x_1, x_2] = [0 \text{ км}, 1 \text{ км}]$ - 0.75 км. Глубина залегания границы на отрезке $[x_1, x_2] = [1 \text{ км}, 2 \text{ км}]$ - 0.5 км. Физические характеристики слоёв были заданы следующими:

- 1) верхний слой - $c_p = 1.6$ км/сек, $c_s = 1.2$ км/сек, $\rho = 1.2$ г/см³;
- 2) нижний слой - $c_p = 2$ км/сек, $c_s = 1.5$ км/сек, $\rho = 1.5$ г/см³.

Волновое поле моделировалось от группы источников, состоящей из 10 точечных источников типа центра расширения, расположенных на линии в направлении оси X . Координаты первого источника $x_0 = 1$ км, $y_0 = 1$ км, $z_0 = 0.005$ км. Интервал между источниками $\Delta x = 0.01$ км. Каждый источник начинает работать с задержкой по времени $\Delta t = 0.006$ секунды относительно соседнего. Временной сигнал в источниках задавался в виде импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)),$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 30$ Гц, $t_0 = 0.05$ сек.

Результаты численных расчетов волнового поля для заданной модели среды представлены на **Рис. 2-4**. На **Рис. 2** и **Рис. 3** изображены мгновенные снимки волнового поля для u_z компоненты скорости смещений в момент времени $T = 0.4$ и $T = 0.6$ секунды. Слева - в плоскости $Y=1$ км, справа - в плоскости $X=1$ км. Граница раздела слоёв показана сплошной линией. Из представленных рисунков видно отличие в распространении волнового поля в плоскости расположения источников и в плоскости перпендикулярной линии расположения источников. На **Рис. 4** изображён мгновенный снимок волнового поля для $u_z(x, y, z)$ в момент времени $T = 0.6$ секунды. Тестовые расчёты проводились на основе двух алгоритмов распараллеливания описанных выше. Сравнение результатов расчётов и времени счёта показывают хорошую эффективность распараллеливания в случае использования алгоритма разбиения исходной области модели при разностной аппроксимации на подобласти. Так как при увеличении количества разбиений время расчётов пропорционально уменьшается и имеет практически линейную зависимость.

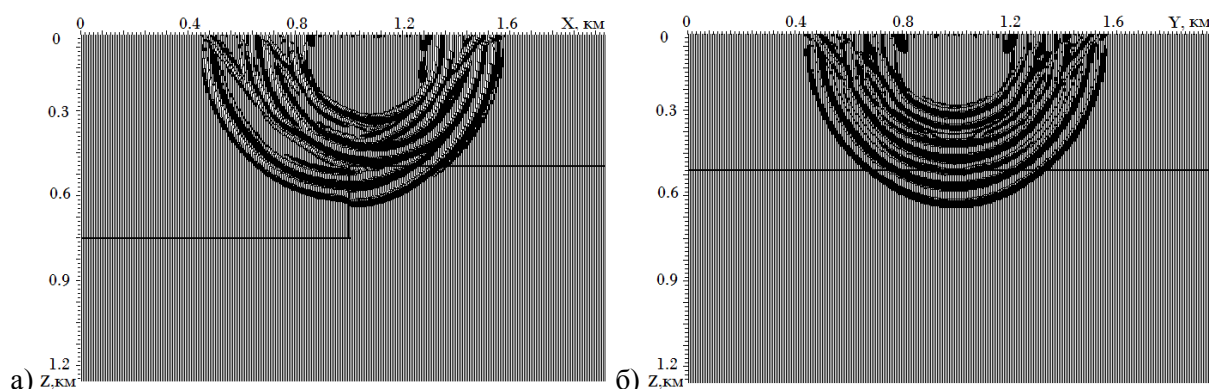


Рис. 2. Мгновенные снимки волнового поля в момент времени $T = 0.4$ секунды для u_z компоненты скорости смещений: а) в плоскости $Y=1$ км; б) в плоскости $X=1$ км

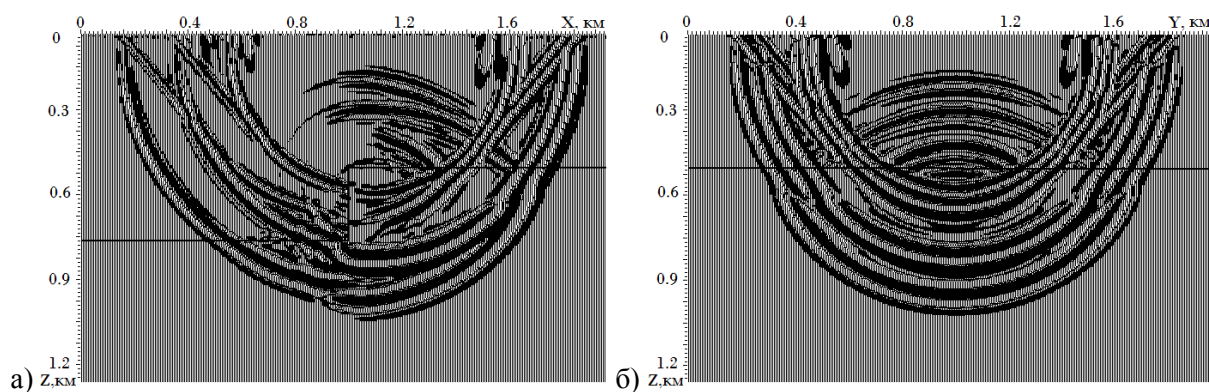


Рис. 3. Мгновенные снимки волнового поля в момент времени $T = 0.6$ секунды для u_z компоненты скорости смещений: а) в плоскости $Y=1$ км; б) в плоскости $X=1$ км

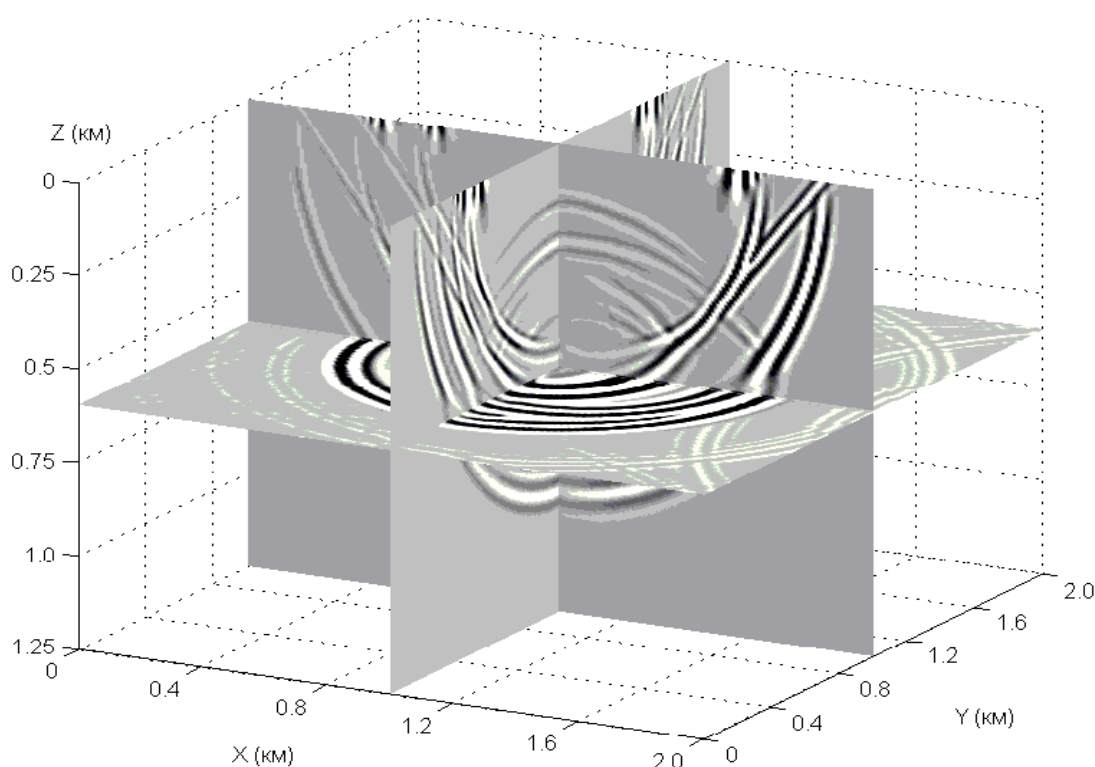


Рис. 4. Мгновенный снимок волнового поля для $u_z(x, y, z)$ в момент времени $T = 0.6$ секунды

Результаты численных расчетов волнового поля для более сложной и большей модели среды (~ 150 минимальных длин волн) представлены на **Рис. 6**. На данном рисунке изображён мгновенный снимок волнового поля для $u_z(x, y, z)$ в случае распространения сейсмических волн в модели среды представленной на **Рис. 5**. Моделировалось волновое поле от точечного источника типа центр давления с координатами $(x_0, y_0, z_0) = (7.5 \text{ км}, 3.5 \text{ км}, 0.01 \text{ км})$. Временная зависимость в источнике задавалась по формуле Пузырёва. Основная частота 10 Гц. Плотности начиная со второго слоя рассчитываются по формуле Гарднера - $\rho = 1.745 * V_p^{0.25}$, где ρ - плотность (г/см^3), V_p - скорость продольных волн (км/сек). В первом слое - вода $\rho = 1 \text{ г/см}^3$.

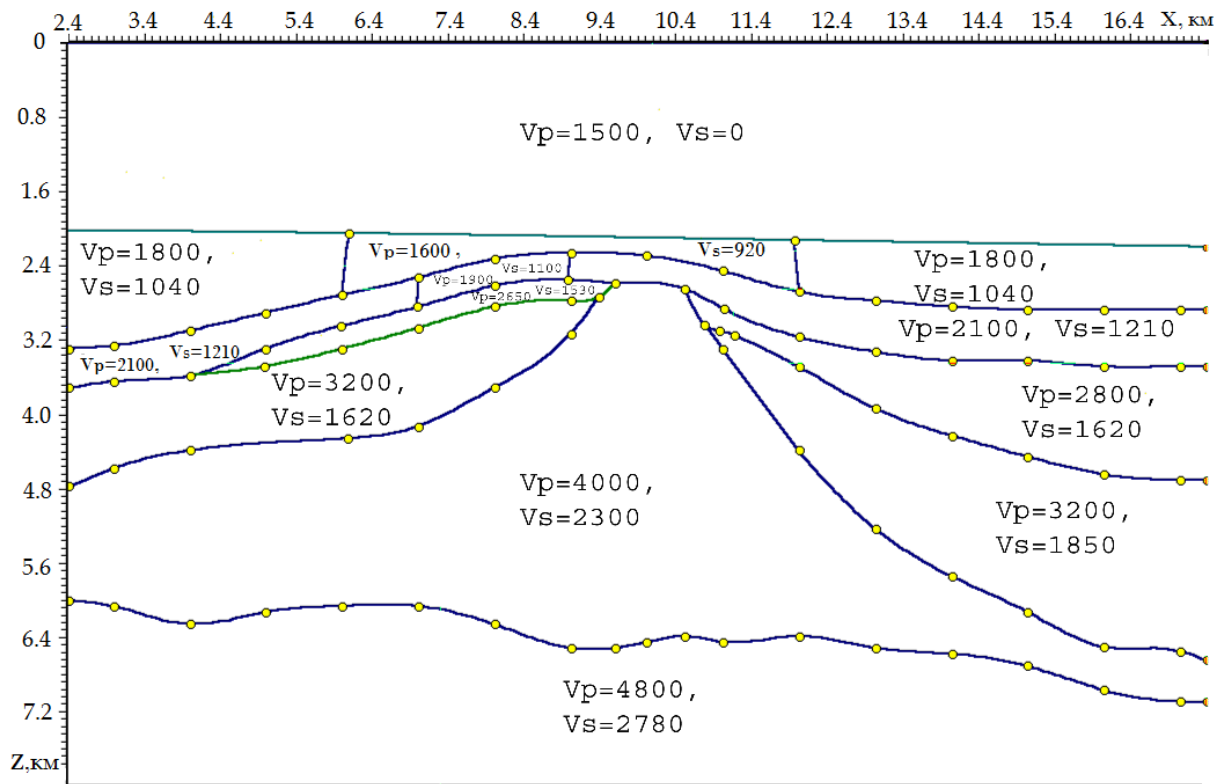


Рис. 5. Модель среды в плоскости XZ

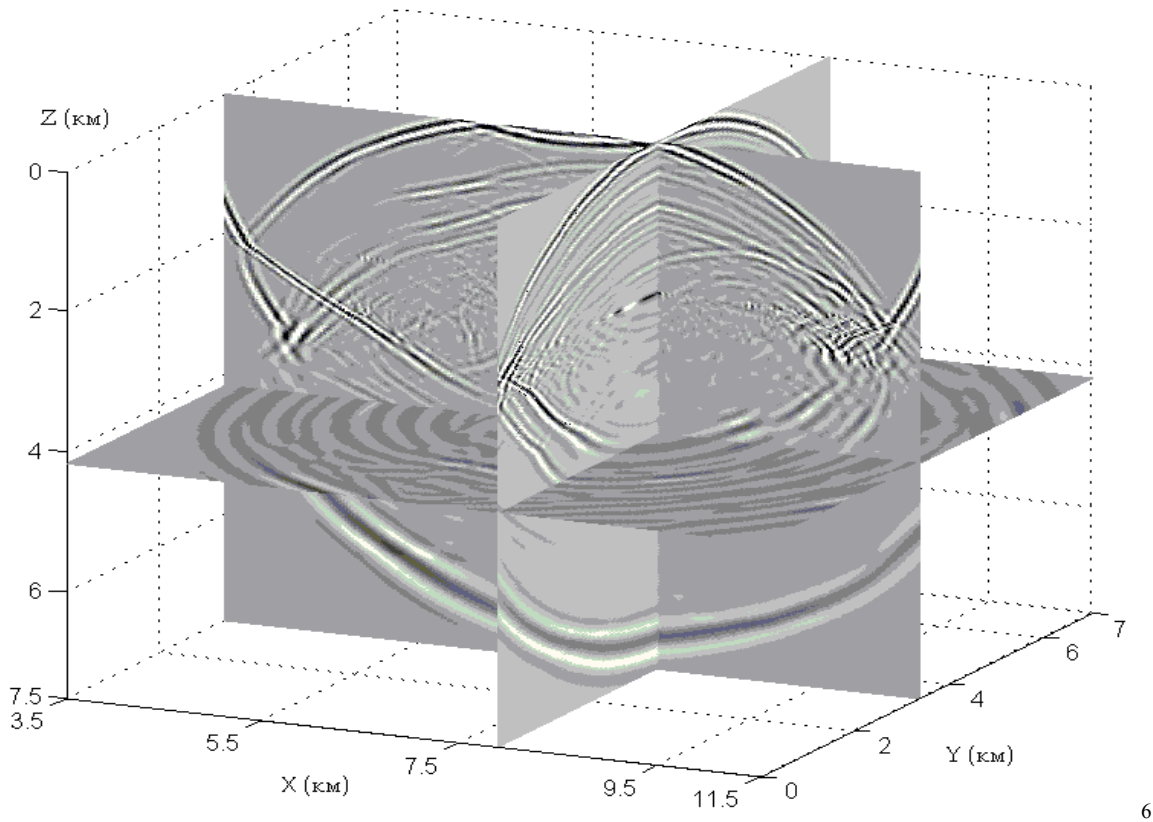


Рис. 6. Мгновенный снимок волнового поля для $u_z(x, y, z)$ в момент времени $T = 3$ секунды

6. Заключение

Анализ проведённых исследований и численные эксперименты показывают, что рассмотренный подход к решению поставленной задачи на основе комплексного использования аналитических преобразований и численных методов позволяет построить эффективные алгоритмы организации распараллеливания расчётов, а также осуществлять гибкое изменение алгоритма в зависимости от заданной модели среды.

Литература

1. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // *Applied Mathematics Letters*. 1999. № 12. P. 105–110.
2. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // *Journal of Computational Acoustics*. 2001. Vol. 9, № 4. P. 1523-1541.
3. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // *Journal Pure and Applied Geophysics*. 2003. № 160. P. 1207–1224.
4. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // *Geophysical Prospecting*, 2003. № 51. P. 37–48.
5. Имомназаров Х.Х., Михайлов А.А. Использование спектрального метода Лагерра для решения линейной двумерной динамической задачи для пористых сред // *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2008. Т. 11, № 2(35). С. 86-95.
6. Михайлов А.А. Моделирование сейсмических полей для 2.5D неоднородных вязкоупругих сред // *Труды международной конференции "Математические методы в геофизике"*. Новосибирск. 2003. Часть 1. С. 146-152.
7. Levander A.R. Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // *Proc. 57-th SEG Annual Meeting*. New Orleans. 1987. P. 234 – 245.*-