Решение уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова на многопроцессорной вычислительной системе с распределенной памятью

О.А. Савицкий, Т.А. Чистякова, А.В. Шишеня

Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге

Математическое моделирование является мощным инструментом изучения сложных нелинейных волновых процессов [1]. Модели звуковых пучков и их программные реализации находят практическое применение в гидроакустике, неразрушающем контроле, медицинской диагностике.

Для описания распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде использовано уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-v\frac{\partial v}{\partial\theta}-\Gamma\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)=\frac{N}{4}\Delta_\perp v$$

с начальным условием: $v(0,\theta,r)=V(\theta,r)$

В результате применения метода расщепления по физическим процессам, исходное уравнение заменяется двумя дифференциально-разностными аналогами уравнения Бюргерса и параболического уравнения квазиоптики. Проведено исследование устойчивости и сходимости построенной дискретной математической модели к решению уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова. Разностная схема устойчива и монотонна при следующих ограничениях на шаги по пространству[2]:

$$h_\theta \le \frac{2\Gamma}{|u|},\ h_z \le \frac{h_\theta^{\,2}}{2\Gamma(1-\sigma)},$$

где Γ - диссипативный параметр, $|u|$ - характерный масштаб возмущения скорости среды, h_z, h_θ - шаги дискретизации по пространству и времени, σ- вес разностной схемы.

Погрешность аппроксимации математической модели равна $O(h_z + h_\theta^2)$. Разностная схема абсолютно устойчива при: $\sigma \ge 1/2$ и имеет второй порядок погрешности аппроксимации при $\sigma = 1/2$. Построенная дискретная модель соответствует ее непрерывному аналогу с точки зрения баланса энергии и является консервативной.

Параллельная реализация алгоритма выполнена методом геометрического параллелизма по двум направлениям, что требует использования $PN \cdot PM$ процессоров. Прямое БПФ реализовано на основе прореживания по частоте, а обратное – на основе прореживания по времени, в этом случае, при работе с данными между прямым и обратным преобразованием не требуется выполнения передач для переупорядочивания элементов, но следует учитывать порядок их следования. Отладка и выполнение программной реализации решения уравнения Хохлова-Заболоцкой-Кузнецова проводились на кластере ТТИ ЮФУ.

Разработанный на основе изложенного алгоритма программный пакет успешно применяется как для научных исследований, так и для инженерных расчетов, требующих использования подробных сеток. С помощью построенной модели выполнен численный эксперимент и доказана возможность существования фокусировки звуковых пучков [3].

Литература

1. Чистякова Т.А. Дискретная конечно-разностная модель распространения волновых пучков, описываемая квазилинейным уравнением параболического типа. Известия ЮФУ. Технические науки. – Таганрог: Изд-во Технологического Института ЮФУ, 2009. – С. 118-129.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1989.
3. Савицкий О.А. Пространственные нелинейные эффекты при взаимодействии волн с различными временными масштабами, Сборник трудов XXII сессии РАО, Т.1., с.204-208. М.: ГЕОС. 2010г.