Параллельный алгоритм решения дробно-дифференциальных уравнений переноса на основе модифицированного метода Шварца

Лукащук С.Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет
lsu@mail.rb.ru

Постановка задачи

Задача Коши для уравнения аномальной диффузии дробного порядка:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \quad t>0, \quad x\in(-\infty,\infty), \quad \alpha\in(0,1); \qquad (1)$$

$$y(x,0) = g(x), \quad x\in(-\infty,\infty),$$

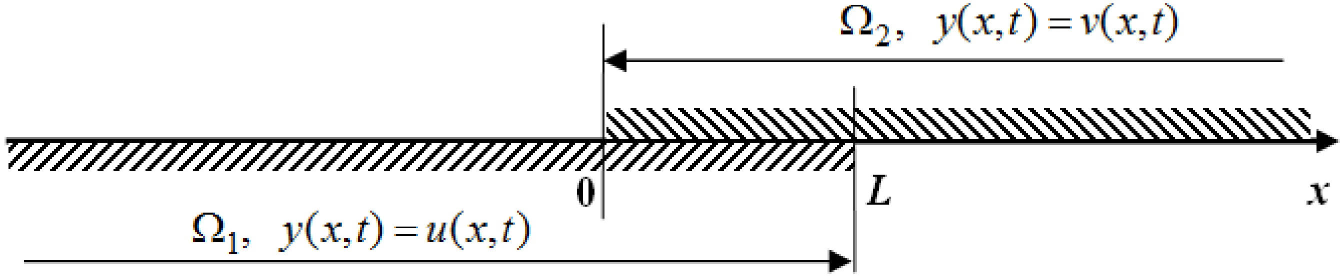
где

$$\frac{\partial^\alpha y(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{y(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau, \quad \alpha\in(0,1) \qquad (2)$$

- левосторонняя частная дробная производная по *t* порядка α (производная типа Римана-Лиувилля).

Задача (1) описывает субдиффузионные процессы.

Модификация метода Шварца



$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \quad t>0, \quad x\in\Omega_1, \quad \alpha\in(0,1);$$

$$u(x,0)=g(x), \quad x\in\Omega_1;$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \quad t>0, \quad x\in\Omega_2, \quad \alpha\in(0,1);$$

$$v(x,0)=g(x), \quad x\in\Omega_2.$$

Внутренние граничные условия:

$$(B+\Lambda_1)u(x,t)\big|_{x=L} = (B+\Lambda_1)v(x,t)\big|_{x=L}, \qquad B = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$(B+\Lambda_2)v(x,t)\big|_{x=0} = (B+\Lambda_2)u(x,t)\big|_{x=0},$$

Λ_1 и Λ_2 - линейные операторы по *t*.

Итерационный процесс

Для решения задачи (3) - (4) организуется следующий итерационный процесс:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u^n(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 u^n(x,t)}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \quad t>0, \quad x<L,\\
&u^n(x,0) = g(x), \quad x \le L,\\
&(B+\Lambda_1)u^n(x,t)\Big|_{x=L} = (B+\Lambda_1)v^{n-1}(x,t)\Big|_{x=L}, \quad t>0;\\
&\frac{\partial v^n(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 v^n(x,t)}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \quad t>0, \quad x>0,\\
&v^n(x,0) = g(x), \quad x \ge 0,\\
&(B+\Lambda_2)v^n(x,t)\Big|_{x=0} = (B+\Lambda_2)u^{n-1}(x,t)\Big|_{x=0}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Задача: определить вид операторов Λ_1 и Λ_2, который будет гарантировать сходимость итерационного процесса (5) за конечное число итераций.

Определение вида операторов

Ошибки на n-ой итерации

$$\varphi^n(x,t) = u(x,t) - u^n(x,t) \qquad \psi^n(x,t) = v(x,t) - v^n(x,t)$$

определяются итерационным процессом

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi^n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 \varphi^n(x,t)}{\partial x^2}\right), \quad t>0, \quad x<L, \\
&\varphi^n(x,0) = 0, \quad x \le L, \\
&(B+\Lambda_1)\varphi^n(x,t)\Big|_{x=L} = (B+\Lambda_1)\psi^{n-1}(x,t)\Big|_{x=L}, \quad t>0; \\
&\frac{\partial \psi^n(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 \psi^n(x,t)}{\partial x^2}\right), \quad t>0, \quad x>0, \\
&\psi^n(x,0) = 0, \quad x \ge 0, \\
&(B+\Lambda_2)\psi^n(x,t)\Big|_{x=0} = (B+\Lambda_2)\varphi^{n-1}(x,t)\Big|_{x=0}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Определение вида операторов

Преобразование Лапласа:

$$L[y(x,t)](s) \equiv \tilde{y}(x,s) = \int_0^\infty e^{-st} y(x,t)dt.$$

Предположение:

$$L[\Lambda_i y(x,t)](s) = \lambda_i(s)\tilde{y}(x,s), \quad i = 1, 2.$$

Задача (6) в пространстве изображений по Лапласу:

$$\begin{gathered}
s\tilde{\varphi}^n(x,s) = Ds^\alpha \tilde{\varphi}^n_{xx}(x,s), \quad x < L, \\
Ds^\alpha \tilde{\varphi}^n_x(L,s) + \lambda_1(s)\tilde{\varphi}^n(L,s) = Ds^\alpha \tilde{\psi}^{n-1}_x(L,s) + \lambda_1(s)\tilde{\psi}^{n-1}(L,s); \\
s\tilde{\psi}^n(x,s) = Ds^\alpha \tilde{\psi}^n_{xx}(x,s), \quad x > 0, \\
Ds^\alpha \tilde{\psi}^n_x(0,s) + \lambda_2(s)\tilde{\psi}^n(0,s) = Ds^\alpha \tilde{\varphi}^{n-1}_x(0,s) + \lambda_2(s)\tilde{\varphi}^{n-1}(0,s).
\end{gathered} \tag{7}$$

Определение вида операторов

Общее решение уравнений задачи (7):

$$\tilde{\varphi}^n(x,s) = C_1^n e^{\omega x}, \quad x < L; \qquad \tilde{\psi}^n(x,s) = C_2^n e^{-\omega x}, \quad x > 0; \quad \omega = \sqrt{\frac{s^{1-\alpha}}{D}}. \qquad (8)$$

Подстановка (8) в граничные условия задачи (7) дает

$$\tilde{\varphi}^{n+1}(0,s) = \rho(s)\tilde{\varphi}^{n-1}(0,s), \quad \tilde{\psi}^{n+1}(0,s) = \rho(s)\tilde{\psi}^{n-1}(0,s),$$

где

$$\rho(s) = \frac{(\lambda_1(s) - Ds^\alpha\omega)(\lambda_2(s) + Ds^\alpha\omega)}{(\lambda_1(s) + Ds^\alpha\omega)(\lambda_2(s) - Ds^\alpha\omega)} e^{-2\omega L} \; .$$

Из условия $\rho(s) = 0$ находим:

$$\lambda_1(s) = \sqrt{D}s^\beta, \quad \lambda_2(s) = -\sqrt{D}s^\beta, \quad \beta = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Обратное преобразование Лапласа: $L^{-1}[s^\beta \tilde{y}(s,x)] = \dfrac{\partial^\beta y(x,t)}{\partial t^\beta}.$

Вид операторов внутренних граничных условий

У т в е р ж д е н и е.

Если операторы Λ_1 и Λ_2 имеют вид

$$\Lambda_1 = \sqrt{D}\,\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}, \quad \Lambda_2 = -\sqrt{D}\,\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}, \quad \beta = \frac{1+\alpha}{2},$$

то итерационный процесс (5) сходится к точному решению за две итерации независимо от начального приближения и глубины перекрытия *L*.

Модельная задача на отрезке

Начально-краевая задача для уравнения субдиффузии на отрезке:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right) + f(x,t), \quad t>0, \quad x\in(-1,1), \quad \alpha\in(0,1);$$

$$y(x,0) = g(x), \quad x\in[-1,1];$$

$$y(-1,t) = \mu_1(t), \quad y(1,t) = \mu_2(t), \quad t>0. \qquad (9)$$

Область $\Omega = [-1,1]$ разбивается на две равные подобласти без перекрытия: $\Omega_1 = [-1,0]$ и $\Omega_2 = [0,1]$.

Аппроксимация производной дробного порядка на основе формулы Грюнвальда-Летникова:

$$\left.\frac{\partial^\alpha z(t)}{\partial t^\alpha}\right|_{t=t_N} = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha}\sum_{k=0}^{N} w_k^{(\alpha)} z(t_N - k\Delta t) + O(\Delta t), \quad t_N = N\Delta t,$$

где

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \quad w_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) w_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1,2,\dots .$$

Конечно-разностная схема

Локальная сетка в каждой подобласти Ω_k $(k=1,2)$:

$$\bar{\omega}_{\Delta x,\Delta t}=\{(x_i,t_j): x_i=i\Delta x,\ t_j=j\Delta t,\ i=0,1,\ldots,M,\ \Delta x=1/M,\ j=0,1,\ldots,N,\ \Delta t=t_N/N\}.$$

Сеточные функции решения – в $\Omega_1 : u(x_i,t_j)=u_{i,j}$, в $\Omega_2 : v(x_i,t_j)=v_{i,j}$.

Конечно-разностная схема задачи в области Ω_1:

$$\frac{u_{i,j}^n-u_{i,j-1}}{\Delta t}=\frac{D}{(\Delta t)^\alpha(\Delta x)^2}\left[\Delta u_{i,j}^n+\sum_{k=1}^{j}w_k^{(\alpha)}\Delta u_{i,j-k}\right]+f_{i,j},\ i=1,2,\ldots,M-1,\quad j=1,2,\ldots;$$

$$u_{i,0}^n=g_i,\ i=0,1,\ldots,M;\quad u_{0,j}^n=\mu_{1,j},\ j=1,2,\ldots;$$

$$\frac{D}{(\Delta t)^\alpha\Delta x}\left[\nabla u_{M,j}^n+\sum_{k=1}^{j}w_k^{(\alpha)}\nabla u_{M,j-k}\right]+\frac{\sqrt{D}}{(\Delta t)^\beta}\left[u_{M,j}^n+\sum_{k=1}^{j}w_k^{(\beta)}u_{M,j-k}\right]=$$

$$=\frac{D}{(\Delta t)^\alpha\Delta x}\left[\nabla v_{0,j}^{n-1}+\sum_{k=1}^{j}w_k^{(\alpha)}\nabla v_{0,j-k}\right]+\frac{\sqrt{D}}{(\Delta t)^\beta}\left[v_{0,j}^{n-1}+\sum_{k=1}^{j}w_k^{(\beta)}v_{0,j-k}\right],\ j=1,2,\ldots;$$

$$u_{i,j}^0=u_{i,j-1};\quad \Delta u_{i,j}^n=u_{i+1,j}^n-2u_{i,j}^n+u_{i-1,j}^n,\ \nabla u_{M,j}^n=u_{M,j}^n-u_{M-1,j}^n,\ \nabla v_{0,j}^n=v_{1,j}^n-v_{0,j}^n.$$

СЛАУ

$$AU_j^n = H_j^n,$$

где

$$U_j^n = \left(u_{0,j}^n, u_{1,j}^n, \ldots, u_{M,j}^n\right)^T, \qquad H_j^n = \left(h_{0,j}, h_{1,j}, \ldots, h_{M,j}^n\right)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ -a & 1+2a & -a & & & & \\ & -a & 1+2a & -a & & & \\ & & & \ldots & & & \\ & & & & -a & 1+2a & -a \\ & & & & & -b & 1+b \end{pmatrix}, \quad a = \frac{D(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Delta x^2}, \quad b = \frac{\sqrt{D}(\Delta t)^{\beta-\alpha}}{\Delta x}$$

$$h_{0,j} = \mu_{1,j}; \quad h_{i,j} = u_{i,j-1} + a\sum_{k=1}^{j} w_k^{(\alpha)} \Delta u_{i,j-k} + f_{i,j},\ i = 1,2,\ldots,M-1;$$

$$h_{M,j}^n = v_{0,j}^{n-1} + b\nabla v_{0,j}^{n-1} + \sum_{k=1}^{j}\left[w_k^{(\beta)}\left(v_{0,j-k} - u_{M,j-k}\right) + b w_k^{(\alpha)}\left(\nabla v_{0,j-k} - \nabla u_{M,j-k}\right)\right]. \qquad (10)$$

Параллельный алгоритм

1. На основании исходных данных задачи и параметров сетки все *p* вычислителей параллельно рассчитывают коэффициенты матрицы *A* и неизменные составляющие прогоночных коэффициентов.
2. На каждом вычислителе организуется глобальный цикл по временным шагам. На нулевом шаге вектор решения определяется начальным условием.
3. Для произвольного временного шага выполняются следующие действия.
   a) Вычисляются новые коэффициенты $w_j^{(\alpha)}$ и $w_j^{(\beta)}$.
   b) Каждый вычислитель организует внутренний итерационный процесс.
   c) Вычислители, отвечающие за расчет соседних подобластей, обмениваются двумя приграничными значениями. При этом на первом итерационном шаге пересылаются значения с предыдущего временного слоя, а на последующих шагах – значения с предыдущей итерации.
   d) На первом итерационном шаге каждый вычислитель по формулам вида (10) параллельно вычисляет вектор правой части системы. На последующих итерациях пересчитываются только первый и последний элементы вектора *H*, соответствующие внутренним границам.
   e) Каждый вычислитель параллельно решает свою СЛАУ методом прогонки.
   f) Если номер итерации меньше *p*, повтор с шага b), иначе переход на новый временной слой и повтор с шага 3.

Оценка эффективности параллельного алгоритма

Пусть $f(x,t)=0.$ Тогда расчет вектора *H* на каждом вычислителе требует на первой итерации – $2(2j+1)(M+3)$ арифметических операций, а на последующих итерациях – 8 операций. Трудоемкость решения СЛАУ методом прогонки при неизменной матрице А – $9(M+1)$ операций.

Трудоемкость расчета j-го временного слоя:

- на 1 вычислителе: $T_1 = 2(2j+1)[(M+1)p-2]+5[(M+1)p-2]+4;$
- на *p* вычислителях: $T_p = 2(2j+1)(M+3)+8(p-1)+5p(M+1).$

Ускорение параллельного алгоритма:

$$S_p \equiv \frac{T_1}{T_p} = \frac{p-5c_j p-2c_M-6c_j c_M}{1+5c_j p+2c_M+8(p-1)c_j c_M}, \quad c_j = \frac{1}{2(2j+1)}, \quad c_M = \frac{1}{M+1}.$$

При $M >> p > 1$ и $j >> 1$ имеем $c_M \approx 0,$ $c_j \approx 0$ и, следовательно,

$$S_p \sim p, \quad E_p \equiv \frac{S_p}{p} \sim 1.$$

Спасибо за внимание!