

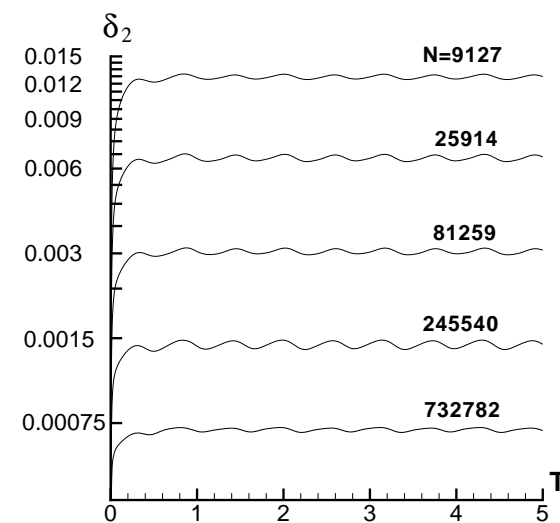
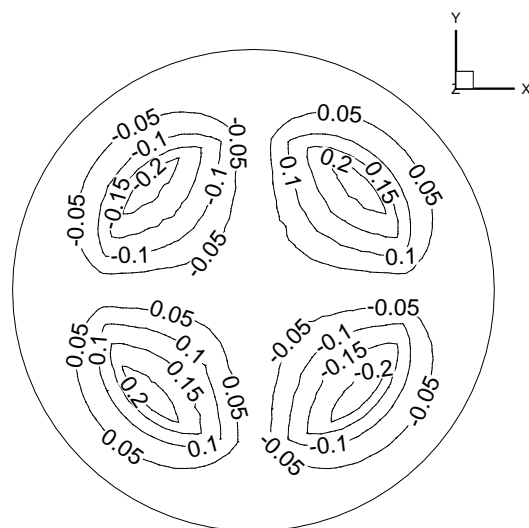
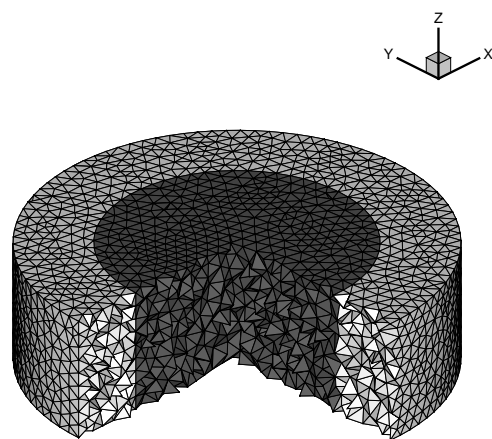
Параллельный алгоритм для решения трёхмерных уравнений Максвелла с разрывной диэлектрической проницаемостью на призматических сетках

Исмагилов Т.З., Горбачёв А.И.
Новосибирский Государственный Университет

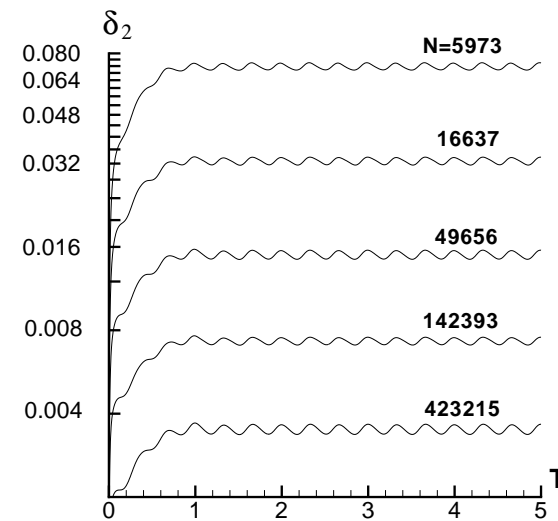
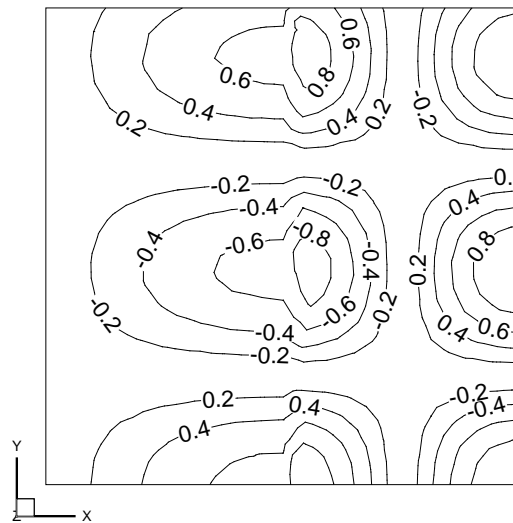
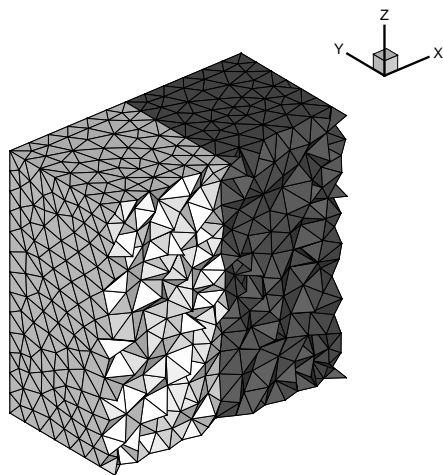
Исмагилов Т.З. Параллельный алгоритм для решения трёхмерных уравнений Максвелла с разрывной диэлектрической проницаемостью // Труды конференции, ПаВТ 2010, Уфа, 2010.

Исмагилов Т.З. Параллельный алгоритм для решения трёхмерных уравнений Максвелла с разрывной диэлектрической проницаемостью на тетраэдральных сетках // Вестник УГАТУ, 2010. -Том 14, N 4. -С. 152-159.

Результаты расчётов



Результаты расчётов



Масштабируемость

Число процессов	Время счёта сек.
1	90179
2	48512
4	25100
8	15243
16	7052
32	3333
64	1715
128	939

План доклада

- Уравнения Максвелла
- Метод конечных объёмов
- Параллельная реализация
- Численные результаты
- Выводы

Уравнения Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \text{где } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \text{где } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 0, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0.$$

Консервативная форма

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{F}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{F}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{F}_3 = 0,$$

\mathbf{U} — вектор консервативных переменных,

\mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 и \mathbf{F}_3 — векторы потоков,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ H_3 \\ -H_2 \\ 0 \\ -E_3 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -H_3 \\ 0 \\ H_1 \\ E_3 \\ 0 \\ -E_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} H_2 \\ -H_1 \\ 0 \\ -E_2 \\ E_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Интегральная форма

Проинтегрировав уравнения по объёму Ω с границей $\partial\Omega$ можно получить эквивалентную интегральную форму

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\partial\Omega} (n_1 F_1 + n_2 F_2 + n_3 F_3) dS = 0,$$

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль.

Недивергентная форма

Систему уравнений также можно записать в недивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V} + A_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{V} = 0,$$

где \mathbf{V} вектор потоковых переменных связанный с вектором консервативных переменных матрицей перехода Θ : $\mathbf{V} = \Theta \mathbf{U}$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицы A_1, A_2, A_3 записываются как

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разностная схема

$$\Omega_{\Delta_i} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} (n_1 \mathbf{F}_1 + n_2 \mathbf{F}_2 + n_3 \mathbf{F}_3) d\Gamma = 0.$$

где U^n аппроксимация значения U в барицентре i -ой ячейки X^B в момент времени $t_n = n\tau$, τ — шаг по времени, а Ω_{Δ_i} объём i -ой ячейки.

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{\Omega_{\Delta_i}} \sum_{k=1}^m s_{\Delta_i}^k \mathbf{F}_i^k,$$

$s_{\Delta_i}^k$ — площадь k -ой грани \mathbf{F}_i^k — поток через k -ую грань.

Аппроксимация потоков

- **Нормаль грани между ячейками**

Пусть $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор нормали к общей грани ячеек Δ_L и Δ_R в точке \mathbf{X}^C .

- **Система Уравнений**

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + A \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} = 0, \quad A = A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3$$

- **Одномерная задача Римана**

$$\Delta_L \text{ и } \Delta_R \text{ — } V_L(\mathbf{X}^C) \text{ и } V_R(\mathbf{X}^C)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon}n_3 & -\frac{1}{\varepsilon}n_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}n_3 & 0 & \frac{1}{\varepsilon}n_1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon}n_2 & -\frac{1}{\varepsilon}n_1 & 0 \\ 0 & n_3 & n_2 & 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Матрицы**

Обозначим $D = R^{-1}AR$, здесь D — диагональная матрица из собственных значений матрицы A , D^{\pm} — диагональные матрицы, полученные из D заменой всех отрицательных (положительных) собственных чисел нулями, R — матрица, столбцы которой являются правыми собственными векторами матрицы A . Тогда $A = RDR^{-1} = RD^{+}R^{-1} + RD^{-}R^{-1} = A^{+} + A^{-}$. Учитывая $V = \Theta U$

- **Потоки**

$$F = \Theta^{-1}(A^{+}V_L(X^C) + A^{-}V_R(X^C))$$

или

$$F = C^{+}V_L(X^C) + C^{-}V_R(X^C).$$

Нахождение полей на границе

$$V_L(\mathbf{X}^C) = V(\mathbf{X}_L^B) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{X}_L^B)(\mathbf{X}^C - \mathbf{X}_L^B) - \frac{\tau}{2} \left(A_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{X}_L^B) + A_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{X}_L^B) + A_3 \frac{\partial V}{\partial x_3}(\mathbf{X}_L^B) \right),$$

$$V_R(\mathbf{X}^C) = V(\mathbf{X}_R^B) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{X}_R^B)(\mathbf{X}^C - \mathbf{X}_R^B) - \frac{\tau}{2} \left(A_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}(\mathbf{X}_R^B) + A_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}(\mathbf{X}_R^B) + A_3 \frac{\partial V}{\partial x_3}(\mathbf{X}_R^B) \right).$$

Нахождение градиентов полей

$$\mathbf{W} = \Xi(\phi, \varepsilon)\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos(\phi) & \varepsilon \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{V}, \quad (1)$$

Параллельная реализация

- геометрическая декомпозиция
- поделить N слоёв призматической сетки между s процессами
- Если N слоёв сетки пронумерованы с 1 по N один из вариантов такой декомпозиции это когда процессу с номером r соответствуют все слои в интервале $[Nr/s + 1, N(r + 1)/s]$
- Все процессы кроме $r = 0$ имеют дополнительный "нижний" слой фиктивных ячеек для получения данных из последнего слоя процесса с номером $r - 1$.
- Аналогично все процессы кроме $r = s - 1$ где имеют дополнительный "верхний" слой фиктивных ячеек для получения данных из первого слоя процесса с номером $r + 1$

1. Передача значений электромагнитных полей в ячейках.
2. Вычисление предварительных градиентов и частичных сумм значений электромагнитных полей в вершинах.
3. Передача частичных сумм и получение окончательных значений электромагнитных полей в вершинах.
4. Вычисление окончательных градиентов.
5. Вычисление значений на гранях.
6. Передача значений на гранях.
7. Вычисление значений в ячейках на новом временном слое.

Подсчёт ошибки

$$\frac{\|\mathbf{V}^n(\mathbf{X}^B) - \mathbf{V}^{\text{exact}}(\mathbf{X}^B, t^n)\|_{L_2}}{\|\mathbf{V}^{\text{exact}}(\mathbf{X}^B, t^n)\|_{L_2}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^P \left[\sum_{k=1}^6 \left(\mathbf{V}_k^n(\mathbf{X}^{B_i}) - \mathbf{V}_k^{\text{exact}}(\mathbf{X}^{B_i}, t^n) \right)^2 \right] \cdot S_{\Delta_i}}{\sum_{i=1}^P \left[\sum_{k=1}^6 \left(\mathbf{V}_k^{\text{exact}}(\mathbf{X}^{B_i}, t^n) \right)^2 \right] \cdot S_{\Delta_i}}}$$

Первый тест

$$E_1 = 3 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi x_3 - \sqrt{3}\pi t),$$

$$E_2 = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \cos(\pi x_3 - \sqrt{3}\pi t),$$

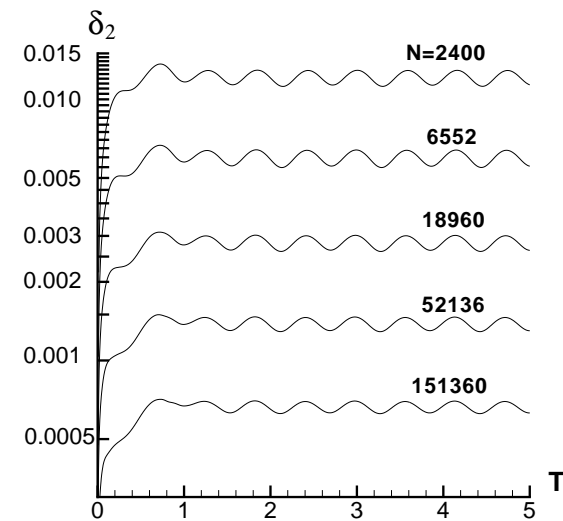
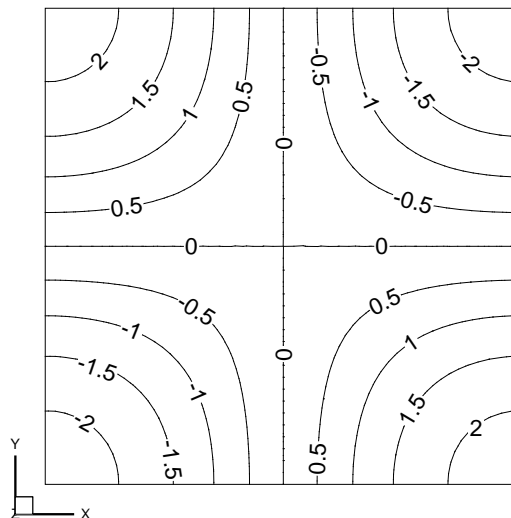
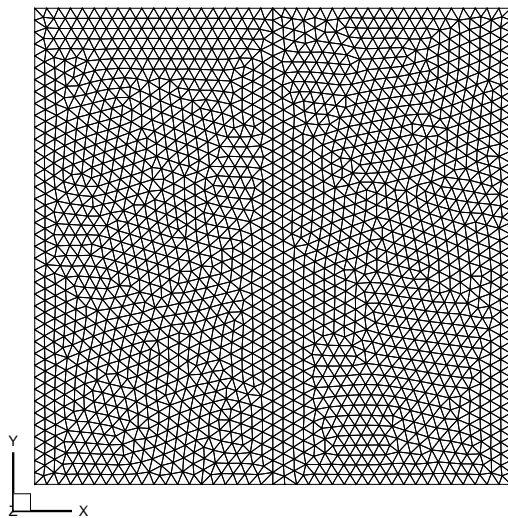
$$E_3 = 2 \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3 - \sqrt{3}\pi t),$$

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi x_3 - \sqrt{3}\pi t),$$

$$H_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \cos(\pi x_3 - \sqrt{3}\pi t),$$

$$H_3 = -\frac{5}{\sqrt{3}} \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_3 - \sqrt{3}\pi t).$$

Результаты расчётов



Порядок аппроксимации

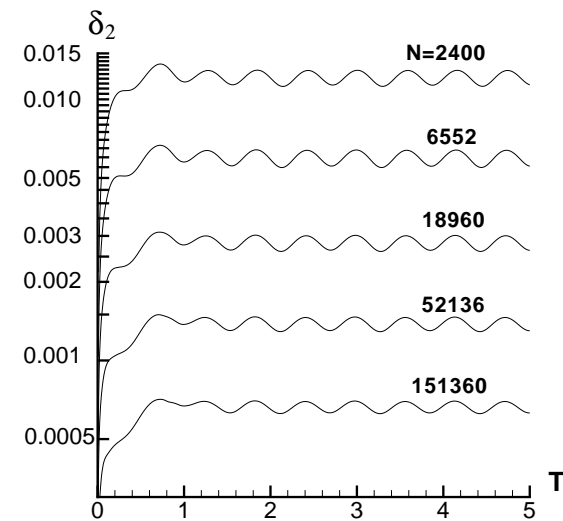
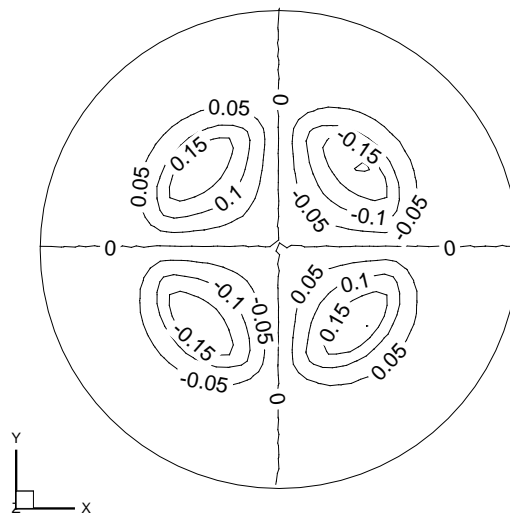
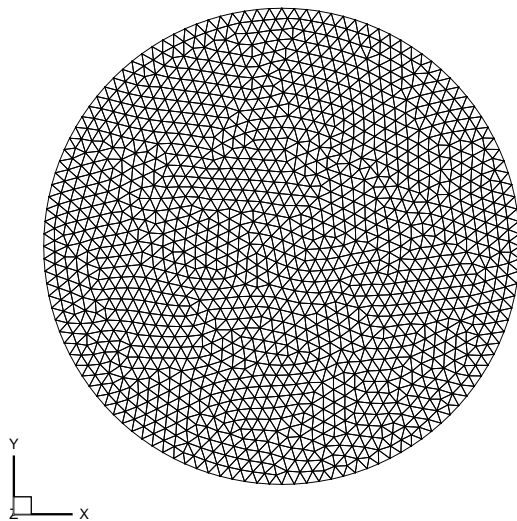
Число призм	δ_2	Порядок аппроксимации
2400	0.013659	
6552	0.006670	2.14
18960	0.003100	2.15
52136	0.001497	2.15
151360	0.000709	2.14

Второй тест

$$\begin{aligned}
 0 \leq r \leq a : \quad E_r &= \beta \frac{a}{u} \left[\frac{1-s}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) - \frac{1+s}{2} J_2 \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \cos(\theta) \sin(kt - \beta z), \\
 E_\theta &= -\beta \frac{a}{u} \left[\frac{1-s}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) + \frac{1+s}{2} J_2 \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \sin(\theta) \sin(kt - \beta z), \\
 E_z &= J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cdot \cos(\theta) \cos(kt - \beta z), \\
 H_r &= kn_1^2 \frac{a}{u} \left[\frac{1-s_1}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) + \frac{1+s_1}{2} J_2 \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \sin(\theta) \sin(kt - \beta z) \\
 H_\theta &= kn_1^2 \frac{a}{u} \left[\frac{1-s_1}{2} J_0 \left(\frac{u}{a} r \right) - \frac{1+s_1}{2} J_2 \left(\frac{u}{a} r \right) \right] \cos(\theta) \sin(kt - \beta z), \\
 H_z &= -\frac{\beta}{k} s J_1 \left(\frac{u}{a} r \right) \cdot \sin(\theta) \cos(kt - \beta z),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r > a : \quad E_r &= \beta \frac{a}{w} \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \left[\frac{1-s}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) - \frac{1+s}{2} K_2 \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \cos(\theta) \sin(kt - \beta z), \\
 E_\theta &= -\beta \frac{a}{w} \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \left[\frac{1-s}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) + \frac{1+s}{2} K_2 \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \sin(\theta) \sin(kt - \beta z), \\
 E_z &= \frac{J_1(u)}{K_1(w)} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \cdot \cos(\theta) \cos(kt - \beta z), \\
 H_r &= kn_0^2 \frac{a}{w} \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \left[\frac{1-s_0}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) + \frac{1+s_0}{2} K_2 \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \sin(\theta) \sin(kt - \beta z) \\
 H_\theta &= kn_0^2 \frac{a}{w} \frac{J_1(u)}{K_1(w)} \left[\frac{1-s_0}{2} K_0 \left(\frac{w}{a} r \right) - \frac{1+s_0}{2} K_2 \left(\frac{w}{a} r \right) \right] \cos(\theta) \sin(kt - \beta z), \\
 H_z &= -\frac{\beta}{k} s \frac{J_1(u)}{K_1(w)} K_1 \left(\frac{w}{a} r \right) \cdot \sin(\theta) \cos(kt - \beta z),
 \end{aligned}$$

Результаты расчётов



Порядок аппроксимации

Число призм	δ_2	Порядок аппроксимации
9352	0.136843	
27080	0.055602	2.54
75964	0.027663	2.29
217000	0.013417	2.21
609000	0.007118	2.12

- Кластер Новосибирского Государственного Университета
- Двойные блэйд-сервера HP BL2x220c
- 32 ГБ оперативной памяти
- четыре 4х-ядерных процессора Xeon E5540 (2.53 ГГц)
- коммуникационная среда InfiniBand

Масштабируемость

Число процессов	Время счёта сек.
1	29871
2	14602
4	7379
8	3836
16	1912
32	973
64	518
128	325

Заключение

- Был предложен параллельный алгоритм на призматических сетках для решения уравнений Максвелла с разрывной диэлектрической проницаемостью
 1. Простое построение сеток
 2. Простая параллельная реализация
- Результаты тестовых расчётов говорят о втором порядке аппроксимации метода и высокой эффективности параллельной реализации
- Параллельный алгоритм может использоваться для решения практических задач.