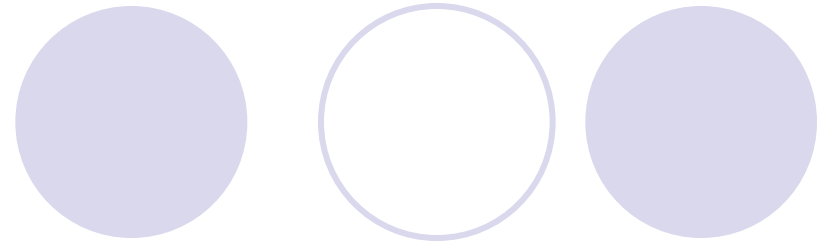
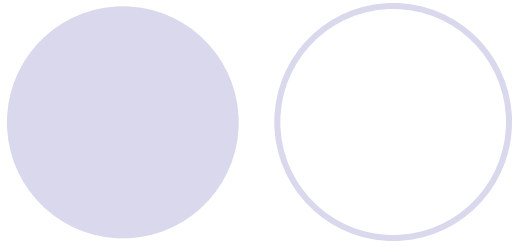


ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СЛЕДОВ

В.П.Ильин, Д.В.Кныш

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
Новосибирск

ПАВТ-2011. Москва.



Содержание:

1. Постановка задачи
2. Описание численных методов
 - 2.1. Методы Крылова в подпространствах
 - 2.2. Организация итерационных процессов
3. Распараллеливание алгоритмов
4. Примеры численных экспериментов
5. Выводы



Постановка задачи:

$$Lu = f(r), \quad r \in \Omega, \quad lu|_{\Gamma} = g. \quad (1)$$

$$\Omega = \prod_{q=1}^P \Omega_q, \quad Lu_q(r) = f_q(r), \quad r \in \Omega_q,$$

$$l_{q,q'}u_q|_{\Gamma_{q,q'}} = g_{q,q'} \equiv l_{q,q'}(u_{q'})|_{\Gamma_{q',q}}, \quad q' \in \varpi_q, \quad q \in 1, \dots, P \quad (2)$$

$$\alpha_q u_q + \beta_q \frac{\partial u_q}{\partial n_q} \Big|_{\Gamma_{q,q'}} = g_{q,q'} = \alpha_{q'} u_{q'} + \beta_{q'} \frac{\partial u_{q'}}{\partial n_{q'}} \Big|_{\Gamma_{q',q}} \quad (3)$$

$$lu_q^n = f_q, \quad l_{q,q'}u_q^n|_{\Gamma_{q,q'}} = l_{q,q'}u_{q'}^{n-1}|_{\Gamma_{q',q}}, \quad q \in 1, \dots, P \quad (4)$$



Подходы

- Топология декомпозиции областей: в трехмерной краевой задаче подобласти могут составлять одномерную, двумерную или трехмерную сеть (1D, 2D или 3D)
- Наличие и величина пересечений смежных подобластей
- Тип граничных условий на внутренних границах
- Очередность пересчета подобластей: последовательная или одновременная (Зейдель и Якоби)
- Организация и ускорение итерационных процессов

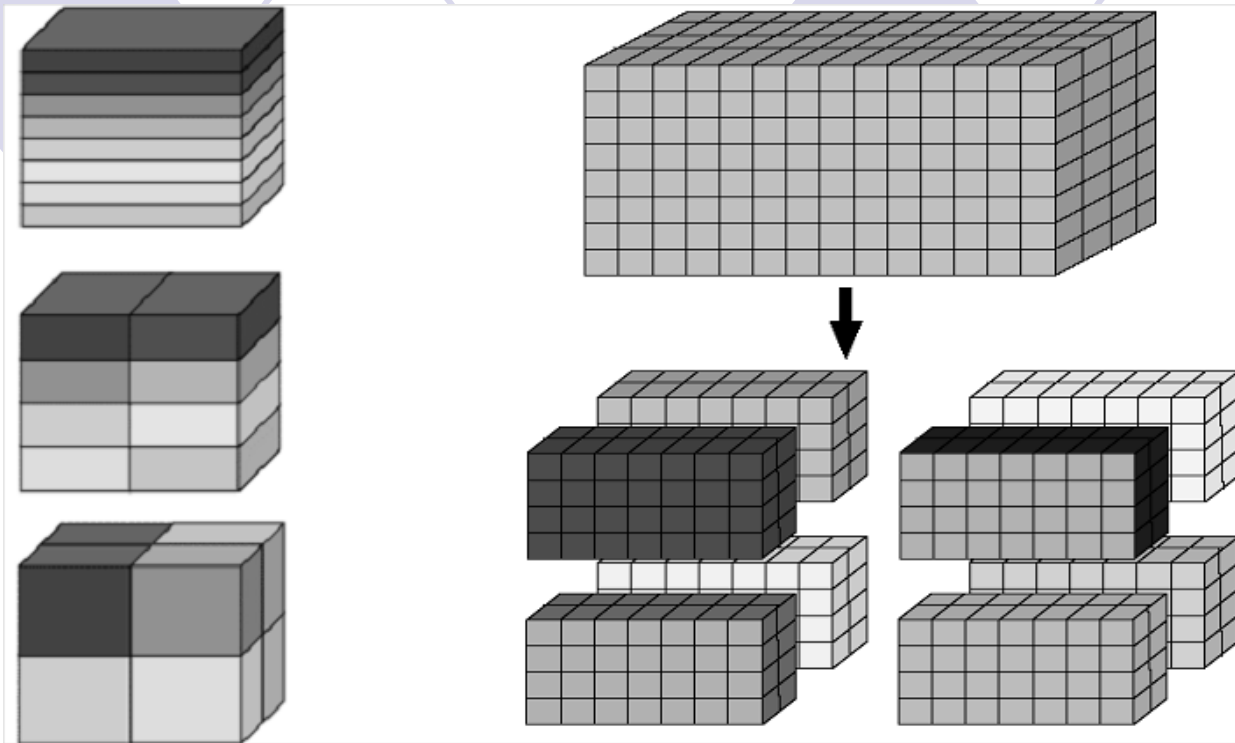


Figure 1. Схемы 1D, 2D и 3D декомпозиции области

Алгебраическое представление методов декомпозиции

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\Gamma} = g, \quad (5)$$

$$(Au^h)_{i,j,k} = 6u_{i,j,k}^h - u_{i-1,j,k}^h - u_{i,j-1,k}^h - u_{i+1,j,k}^h - u_{i,j+1,k}^h - u_{i,j,k-1}^h - u_{i,j,k+1}^h = f_{i,j,k}^h; \quad i, j, k = 1, \dots, M. \quad (6)$$

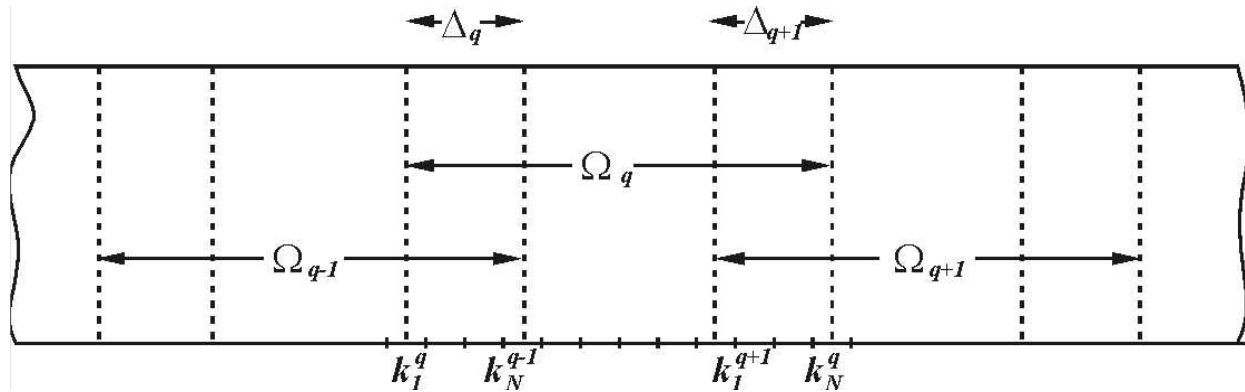


Figure 2. Схема одномерной декомпозиции с пересечением

$$N = k_N^q - k_1^q + 1, \quad m = k_N^q - k_1^{q+1} + 1, \quad M = PN - (P-1)m. \quad (7)$$

$$-A_{q,q-1}u_{q-1} + A_{q,q}u_q - A_{q,q+1}u_{q+1} = f_q, \quad q = 1, \dots, P, \quad A_{1,0} = A_{P,P+1} = 0, \quad (8)$$

$$A_{q,q}u_q^n = \bar{f}_q^{n-1} \equiv f_q + \hat{f}_q^{n-1} + \check{f}_q^{n-1}, \quad \hat{f}_q^{n-1} = A_{q,q-1}u_{q-1}^{n-1}, \quad \check{f}_q^{n-1} = A_{q,q+1}u_{q+1}^{n-1}. \quad (9)$$

$$(A_{q,q}u_q^n)_k = \begin{cases} (C - \theta I)u_{k_1^q}^n - u_{k_1^q+1}^n = f_{k_1^q} + v_{q-1}^{n-1}, v_{q-1}^{n-1} = u_{k_1^q-1}^{n-1} - \theta u_{k_1^q}^{n-1}, & k = k_1^q, \\ (C - \theta I)u_{k_N^q}^n - u_{k_N^q-1}^n = f_{k_N^q} + w_{q+1}^{n-1}, w_{q+1}^{n-1} = u_{k_N^q+1}^{n-1} - \theta u_{k_N^q}^{n-1}, & k = k_N^q, \\ -u_{k-1}^n + Cu_k^n - u_{k+1}^n = f_k, & k = k_1^q + 1, \dots, k_N^q - 1, \end{cases} \quad (10)$$

Особенности распараллеливания алгоритмов

$$\begin{aligned}
 v_q^0 &= C_{q,q-1} u_q^0 = \{u_{i,j,k_N^{q-1}+1}^0 - \theta u_{i,j,k_N^{q-1}}^0; i, j, = 1, \dots, M\}, \\
 w_q^0 &= C_{q,q+1} u_q^0 = \{u_{i,j,k_1^{q+1}-1}^0 - \theta u_{i,j,k_1^{q+1}}^0; i, j, = 1, \dots, M\}.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$$v_q^0, w_q^0: \Omega_q \rightarrow \Omega_{q\pm 1}; \quad v_{q+1}^0, w_{q-1}^0: \Omega_{q\pm 1} \rightarrow \Omega_q.
 \tag{12}$$

$$A_{q,q} \hat{u}_q^1 = \bar{f}_q = \begin{cases} f_{k_1^q} + w_{q-1}^0, & k = k_1^q, \\ f_{k_N^q} + v_{q+1}^0, & k = k_N^q, \\ f_k, & k = k_1^q + 1, \dots, k_N^q - 1. \end{cases}
 \tag{13}$$

$$A_{q,q} \varphi_q^n = \psi_q^n = \begin{cases} \hat{t}_{q-1}^n, & k = k_1^q, \\ \hat{t}_{q+1}^n, & k = k_N^q, \\ 0, & k = k_1^q + 1, \dots, k_N^q - 1. \end{cases}
 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\hat{q}_q^n &= \{\varphi_{i,j,k_N^{q-1}+1}^n - \theta \varphi_{i,j,k_N^{q-1}}^n; \quad i, j = 1, \dots, M\}, \\ \check{q}_q^n &= \{\varphi_{i,j,k_1^{q+1}-1}^n - \theta \varphi_{i,j,k_1^{q+1}}^n; \quad i, j = 1, \dots, M\}.\end{aligned}\tag{15}$$

$$\hat{t}_q^n = \hat{p}_q^n - \hat{q}_q^n, \quad \check{t}_q^n = \check{p}_q^n - \check{q}_q^n\tag{16}$$

$$(t^n, p^n) = \sum_{i,j=1}^M \left(\sum_{q=2}^p \hat{t}_{q,i,j}^n \cdot \hat{p}_{q,i,j}^n + \sum_{q=1}^{p-1} \check{t}_{q,i,j}^n \cdot \check{p}_{q,i,j}^n \right) = (t^n, p^n)_1 + \sum_{q=2}^{p-1} (t^n, p^n)_q + (\hat{t}^n, \hat{p}^n)_p,\tag{17}$$

$$(t^n, p^n)_q = (\hat{t}^n, \hat{p}^n)_q + (\check{t}^n, \check{p}^n)_q, \quad (\hat{t}^n, \hat{p}^n)_q = \sum_{i,j=1}^M \hat{t}_{q,i,j}^n \hat{p}_{q,i,j}^n.$$

Примеры численных экспериментов

$$n_e$$

$$\sum n_i$$

$$t$$

θ/M	9	19	29	49	99
0	8 4 100 73 0	15 8 338 214 5.07-02	21 11 659 399 0.3	34 18 1631 957 3.54	64 33 5542 3094 137.78
0.25	6 4 82 75 0	11 7 264 197 5.07-02	16 10 534 377 0.28	26 15 1312 838 3.13	49 29 4430 2803 124.07
0.5	4 3 77 69 0	8 5 210 159 3.9-02	11 8 402 321 0.25	18 12 976 710 2.66	33 23 3164 2325 103.7
0.75	4 3 84 71 0	4 3 151 140 3.51-02	5 5 251 252 0.2	9 7 579 477 1.84	17 14 1844 1583 72.37
1.00	∞	∞	∞	∞	∞

Табл. 1. Характеристики двойных итераций без внешнего ускорения для $P=2, \Delta=2,4$

θ/M	9	19	29	49	99
0	3 2 57 48 0	5 3 176 114 3.9-02	6 4 292 214 0.17	7 5 511 400 1.55	10 7 1197 920 43.83
0.25	3 2 60 50 0	4 3 145 118 3.12-02	5 4 259 218 0.17	6 5 463 418 1.6	9 7 1157 990 46.52
0.5	2 2 46 52 0	4 3 150 129 3.12-02	4 3 220 172 0.14	6 4 495 358 1.41	8 6 1102 990 42.88
0.75	2 2 50 54 0	3 2 126 102 2.34-02	3 3 175 198 0.16	4 4 372 376 1.46	6 5 961 861 40.73
1.00	∞	∞	∞	∞	∞

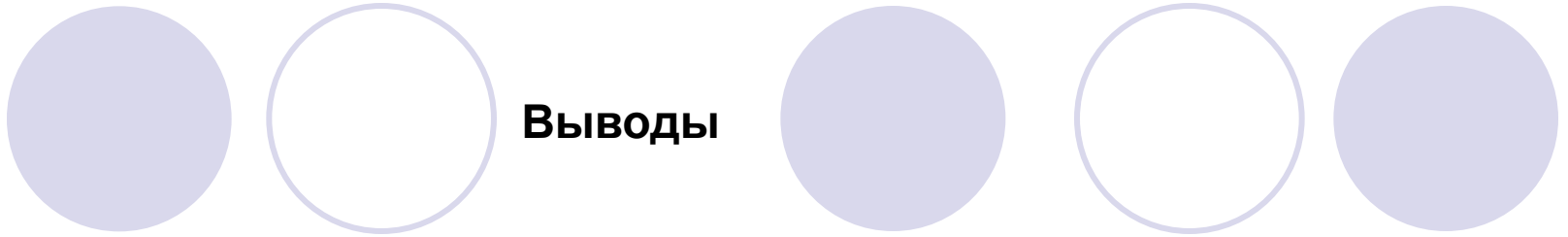
Табл. 2. Характеристики двойных итераций с внешним ускорением методом СГ для $P=2$, $\Delta=2,4$

θ/M	9	19	29	49	99
0	9 4 98 72	17 8 290 183 4.68 02	24 12 560 334 0.24	39 20 1390 780 2.25	73 38 4572 2573 95.88
0.25	6 4 77 71	13 7 241 172 4.68 02	18 11 449 322 0.23	30 18 1129 729 2.11	56 33 3631 2325 87.10
0.5	4 3 70 61	8 6 176 159 4.68 02	12 9 369 289 0.21	20 14 819 607 1.82	38 26 2653 1931 73.39
0.75	4 3 73 64	4 3 148 122 3.12 02	6 5 262 222 0.164	10 8 498 423 1.32	20 16 1692 1354 52.74
1.00	8 4 61 43	18 6 219 110 34.68 02	∞	∞	∞

**Табл. 3. Характеристики итерационных процессов для $P=3$, $\Delta=2,4$
без внешних
сопряженных градиентов**

θ/M	9	19	29	49	99
0	6 4 94 80	7 5 199 162 3.9 02	8 6 307 267 0.19	10 8 578 512 1.51	14 10 328 1061 43.56
0.25	5 4 82 80	6 5 181 166 4.68 02	8 6 324 274 0.19	9 7 545 469 1.40	12 9 1215 1010 41.05
0.5	5 5 85 88	5 5 162 170 4.29 02	6 5 271 243 0.17	7 7 465 487 1.44	10 8 1120 964 38.92
0.75	6 5 95 94	5 6 174 205 5.07 02	5 4 255 224 0.16	5 5 393 403 1.21	7 7 914 958 38.49
1.00	∞	∞	∞	∞	∞

**Табл. 4. Характеристики итерационных процессов с внешними СГ
(для $P=3$, $\Delta=2,4$)**



Выводы

- с увеличением отношения M/Δ (т.е. с относительным уменьшением размера перехлеста подобластей) количество внешних итераций и общее число внутренних итераций значительно увеличиваются, причем этот рост существенно слабее при использовании СГ
- при изменении параметра θ от 0 до 1 характерна следующая тенденция: при использовании СГ и без него количество внешних и суммарное число внутренних итераций уменьшаются для всех M , но при $\Delta = 1$ обнаруживается, как правило, расходимость процесса (в таблицах обозначаемая символом ∞), в результате чего обнаруживается наличие минимума (в том числе и по времени счета) для значений $\theta = 0.5 \div 0.75$;
- применение ускорения внешних итераций дает значительный эффект, особенно в "плохих" случаях, т.е. при увеличении общего числа узлов и количества подобластей (процессоров); однако при этом наблюдается парадоксальное на первый взгляд уменьшение коэффициента ускорения S_p (в сравнении без применения СГ); тем не менее, этот факт еще раз подтверждает то известное явление, что более плохие алгоритмы легче и эффективнее распараллеливаются.