



**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ
ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА
МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЯХ**

Е.Н. Акимова, Д.В. Белоусов

**Институт математики и механики УрО РАН
г. Екатеринбург**



Аннотация

1. **Линейная обратная задача гравиметрии** о нахождении плотности в слое. Для решения линейной обратной задачи гравиметрии предложены и численно реализованы на суперкомпьютере MBC—1000 и видеоускорителях NVIDIA GeForce Параллельные итерационные алгоритмы (МПИ и ММН). Решена обратная задача гравиметрии с реальными данными.

2. **Задачи электроразведки** (СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами). Для решения СЛАУ предложены и численно реализованы на видеоускорителе NVIDIA GeForce, 4-х ядерном процессоре Intel Core I5-750 и суперкомпьютере MBC-1000 параллельный алгоритм матричной прогонки и параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем. Решена модельная задача о нахождении распределения потенциала на поверхности земли в проводящей среде.

Проведено сравнение времени счета параллельных алгоритмов на вычислителях различного типа с анализом эффективности и ускорения.

Работа выполнена в рамках Междисциплинарного проекта УрО РАН и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 14 при поддержке УрО РАН.

Постановка обратной задачи гравиметрии

Одной из важнейших моделей строения земной коры является модель горизонтальной слоистой среды. Рассм. **линейная обратная задача гравиметрии** о нахождении переменной плотности $\sigma(x, y)$ в горизонтальном или криволинейном слое

$$\Pi = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, H_1(x, y) \leq z \leq H_2(x, y)\}$$

по грав. данным, измеренным на площади земной поверхности $D = \{(x, y) \in R^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Используется априорная информация об отсутствии аномалий плотности вне слоя с криволинейными границами $H_1 = H_1(x, y)$ и $H_2 = H_2(x, y)$ такими, что $H_1 < H_2 \quad \forall (x, y)$ и выпол. условие $H_i(x, y) \rightarrow h_i = const$. Предполагается, что распределение плотности внутри слоя не зависит от z .

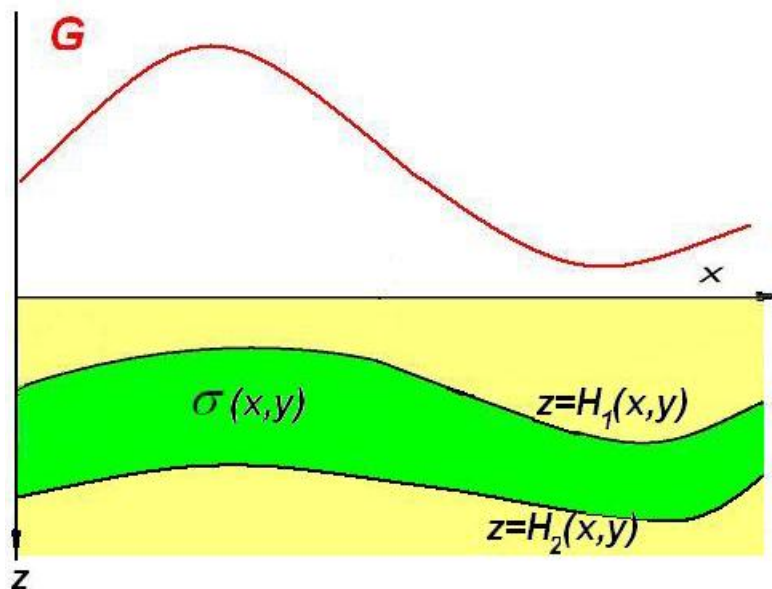


Рис. 1.



Нахождение плотности в слое

Задача сводится к решению **линейного двумерного интегрального уравнения Фредгольма** первого рода для нахождения искомой плотности [1]

$$A\sigma \equiv f \int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_1^2(x', y') \right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H_2^2(x', y') \right]^{1/2}} \right\} \sigma(x', y') dx' dy' = \Delta g(x, y), \quad (1)$$

где f – гравитационная постоянная, $\Delta g(x, y)$ – гравитационный эффект, порождаемый источниками в горизонтальном или криволинейном слое.

Уравнение гравиметрии (1) относится к классу **некорректно поставленных задач**, решение которой обладает сильной чувствительностью к погрешности правой части, полученной в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

[1]. Martyshko P.S., Koksharov D.E. On the construction of the density sections using gravity data // Extended Abstracts of 66th EAGE Conference and Exhibition. Paris, 7-12 June 2004. P. 143.



Методы решения

После дискретизации уравнения (1) на сетке $n = M \times N$, где задана правая часть $\Delta g(x, y)$, и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (1) сводится к решению СЛАУ с плохо обусловленной либо симметричной матрицей (горизонтальный слой), либо несимметричной матрицей (криволинейный слой)

$$(A + \alpha E)z = b, \quad \text{схема Лаврентьева} \quad (2)$$

В случае криволинейного слоя СЛАУ предварительно преобразуется к виду

$$(A^T A + \alpha' E)z = A^T b. \quad \text{схема Тихонова} \quad (3)$$

где α, α' – параметры регуляризации.

Для решения СЛАУ (2), (3) используются регулярные итерационные методы градиентного типа [2].

[2]. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы Фейеровского типа. Теория и приложения. – Екатеринбург, 2005.



Методы решения СЛАУ

1. Итеративно регуляризованный метод простой итерации (МПИ)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{1}{\lambda_{\max}} [(A + \alpha E)z^k - b], \quad (4)$$

где λ_{\max} – макс. собств. значение $A + \alpha E$

2. Метод минимальных невязок (ММН)

$$z^{k+1} = z^k - \frac{(A(Az^k - b), Az^k - b)}{\|A(Az^k - b)\|^2} (Az^k - b); \quad (4')$$

$$\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon \quad - \quad \text{условие останова.}$$



Параллельная реализация на МВС-1000

Ранее для решения линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении переменной плотности в слое **параллельные методы градиентного типа** были численно реализованы на МВС-1000 с высокой эффективностью распараллеливания [3].

Многопроцессорный вычислительный комплекс **МВС—1000** — российский массивно-параллельный суперкомпьютер кластерного типа с распределенной памятью, установленный в ИММ УрО РАН.

МВС-1000/64 (UM64): 14 2-х процессорных 2-х ядерных модулей AMD Opteron 64 bit (2.6 ГГц); интерфейс GbitEthernet; 112 Гб оперативной памяти.

[3]. Акимова Е.Н., Гемайдинов Д.В. Параллельные алгоритмы решения задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое // Труды института математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. Т. 13. № 3. С. 3-21.



Параллельная реализация на MVS-1000

Комплекс параллельных численных алгоритмов реализован с помощью библиотеки MPI на языке Фортран [4]. Распараллеливание итерационных методов основано на разбиении матриц A и B горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и вектора правой части b СЛАУ на m частей так, что $n = m \times L$, где n – размерность системы уравнений, m – число процессоров, L – число строк матрицы в блоке.

Host – processor
1 – processor
2 – processor
...
m – processor

Рис. 2. Схема распределения данных по процессорам

[4]. Баранов А.В., Лацис А.О., Сажин С.В., Храмцов М.Ю. Руководство пользователя системы MVS-1000.
URL: <http://parallel.ru/mvs/user.html>.

Решение задачи гравиметрии с реальными данными

На МВС-1000/64 решена задача с реальными данными о восстановлении плотности в горизонтальном слое между глубинами $H_1 = 10$, $H_2 = 20$ км для области $S_1 : 120 \times 220$ км². Шаги сетки: $\Delta x \approx 0.6$, $\Delta y \approx 1.1$ км. Гравитационная постоянная $f = 6.67 \cdot 10^{-8}$ (см³/г·с²). Задача сводится к СЛАУ с плохо обусловленной симм. заполненной матрицей 40000×40000 . Для решения задачи использовался параллельный итеративно регуляризованный МПИ с параметром регуляризации $\alpha = 0.001$.

$$N = 430, \quad \frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} \approx 4 \cdot 10^{-3}$$

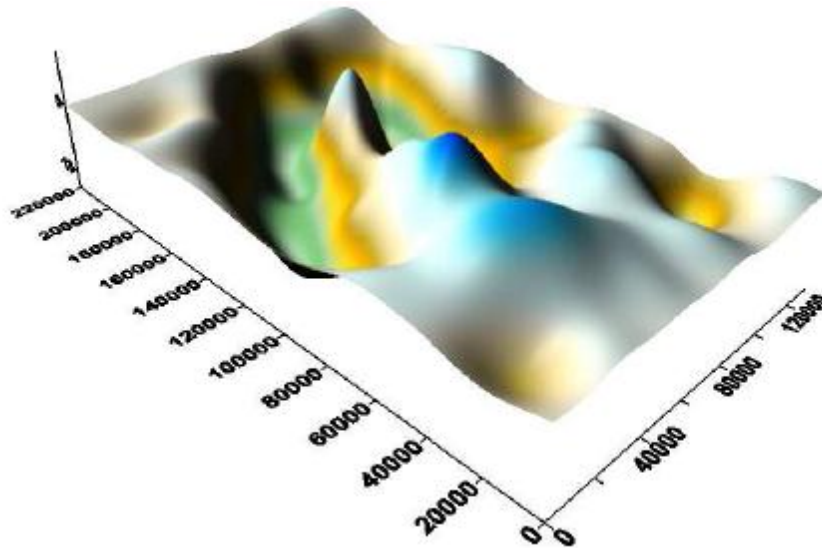


Рис. 3. Исходное гравитационное поле $\Delta g(x, y)$ для области S_1

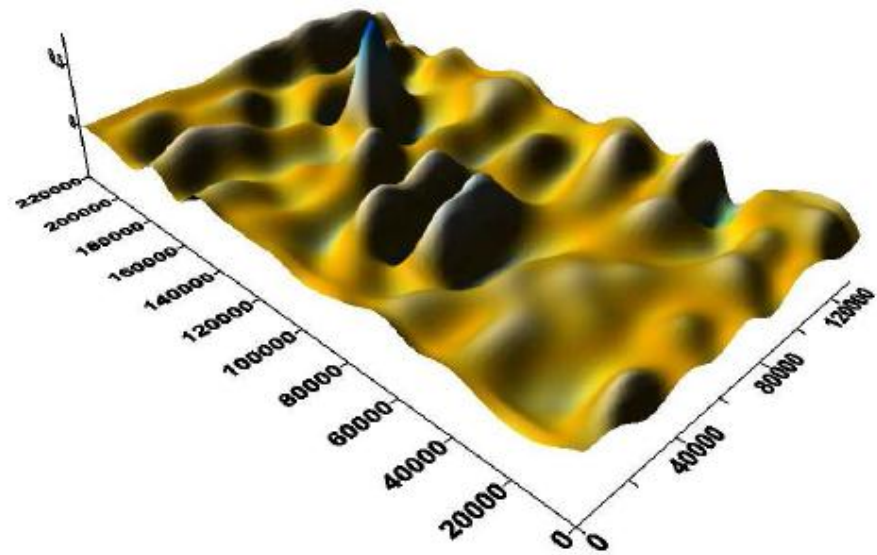
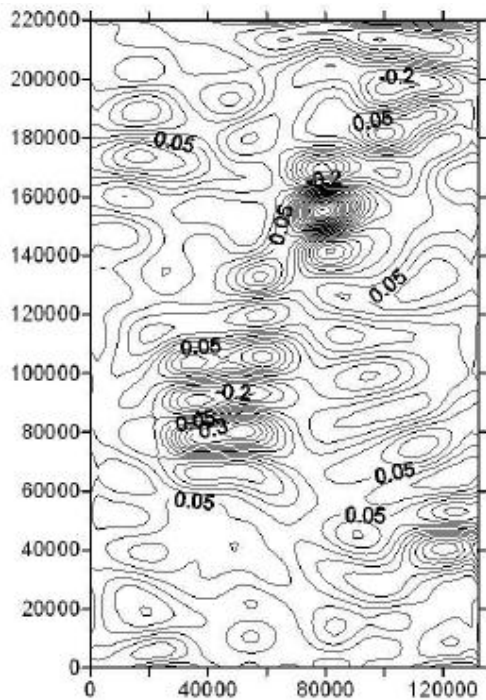


Рис. 4. Линии уровня и распределение восстановленной плотности $\sigma(x, y)$ в слое 10 - 20 км для области S_1

Более темные участки соответствуют зонам разуплотнения, представляющим интерес для геофизической интерпретации.

Ускорение и эффективность

$$S_m = T_1 / T_m, \quad E_m = S_m / m,$$

где T_1 – время выполнения последовательного алгоритма на одном процессоре,
 T_m – время выполнения параллельного алгоритма на МВС с числом процессоров m ($m > 1$),
 $T_m = T_c + T_o$ – совокупность чистого времени счета и накладных расходов.

$$0 < E_m < 1$$

В табл. 1 приведены времена счета на МВС-1000/64 и коэффициенты ускорения и эффективности решения задачи гравиметрии для области S_1 с использованием параллельного МПИ для 200 x 200 точек сетки (430 итер).

Матрица СЛАУ формируется и хранится в памяти каждого процессора по частям.

m (число проц.)	T_m (время, мин.)	S_m (ускорение)	E_m (эффективность)
1	55.82	—	—
2	32.96	1.70	0.85
3	20.83	2.80	0.93
8	7.72	7.23	0.90
10	6.26	8.92	0.89
20	3.28	17.0	0.85
30	2.12	26.3	0.88
80	0.88	63.4	0.79

Таблица 1. Решение задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое

Распараллеливание на видеоускорителях с помощью технологии CUDA

<http://www.nvidia.ru>

Для организации параллельных вычислений актуальным в настоящее время является использование видеоускорителей (GPU) компании NVIDIA (рис.4).

Базовый блок - мультипроцессор, содержащий процессорные ядра.

Работа нескольких ядер мультипроцессора основана на архитектуре типа SIMD.

Для поддержки параллельных вычислений компания NVIDIA разработала технологию CUDA [5] - среду разработки программ на языке Си, позволяющую создавать программное обеспечение для решения сложных вычислительных задач.

Линейная задача гравиметрии решена на видеоускорителях GeForce GTX 285 (GPU-1) и GeForce GTX 260 (GPU-2) с помощью технологии CUDA .



Рис. 5. Видеоускоритель GeForce GTX 285

[5]. Берилло А. NVIDIA CUDA – неграфические вычисления на графических процессорах.
URL: <http://www.ixbt.com/video3/cuda-1.shtml>

Табл. 2. Техн. характеристики вычислительной платформы

<p>Характеристики подсистемы GPU-1:</p> <p>Количество процессорных ядер</p> <p>Частота ядра (МГц)</p> <p>Частота процессора (МГц)</p> <p>Количество видеопамяти (Мб)</p>	<p>NVIDIA GeForce GTX 285</p> <p>240</p> <p>648</p> <p>1476</p> <p>1024</p>
<p>Характеристики подсистемы GPU-2:</p> <p>Количество процессорных ядер</p> <p>Частота ядра (МГц)</p> <p>Частота процессора (МГц)</p> <p>Количество видеопамяти (Мб)</p>	<p>NVIDIA GeForce GTX 260</p> <p>192</p> <p>576</p> <p>1242</p> <p>896</p>
<p>Характеристики CPU:</p> <p>Частота процессора (ГГц)</p> <p>Оперативная память (Гб)</p> <p>Разрядность ОС (Бит)</p>	<p>4-ядер. Intel Core I5-750</p> <p>2.66</p> <p>8</p> <p>64</p>

Результаты численных экспериментов

Сравнение времени счета на GPU-1,2 и МВС-1000/64

В табл. 3 приводятся времена решения задачи гравиметрии на Intel Core I5-750 без использования и с использованием видеоускорителей GeForce на разных сетках: 110 x 110 (матр. СЛАУ 12100 x 12100) и 200 x 200 (матр. СЛАУ 40000 x 40000).

Метод — МПИ (280 итер.) Сетка 110 x 110 Матрица СЛАУ 12100 x 12100 $\frac{\ Az^k - b\ }{\ b\ } \approx 3.1 \cdot 10^{-4}.$	Intel Core I5-750 (2.66 ГГц)	84.0 (сек)
	GeForce GTX 285 (240 ядер)	14.0 (сек)
	GeForce GTX 260 (192 ядра)	19.5 (сек)
	МВС—1000/64 (1 проц., 2.6 ГГц)	157.8 (сек)
	МВС—1000/64 (2 проц.)	91.8 (сек)
	МВС—1000/64 (8 проц.)	20.4 (сек)
Метод — МПИ (430 итер.) Сетка 200 x 200 Матрица СЛАУ 40000 x 40000 $\frac{\ Az^k - b\ }{\ b\ } \approx 4 \cdot 10^{-3}.$	МВС—1000/64 (10 проц.)	16.8 (сек)
	Intel Core I5-750 (2.66 ГГц)	31.46 (мин)
	GeForce GTX 285 (240 ядер)	4.08 (мин)
	GeForce GTX 260 (192 ядра)	5.28 (мин)
	МВС—1000/64 (1 проц., 2.6 ГГц)	55.82 (мин)
	МВС—1000/64 (2 проц.)	32.96 (мин)
	МВС—1000/64 (4 проц.)	15.83 (мин)
МВС—1000/64 (5 проц.)	12.40 (мин)	
МВС—1000/64 (10 проц.)	6.26 (мин)	
МВС—1000/64 (15 проц.)	4.16 (мин)	

Параллельные алгоритмы решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами

Задачи многокомпонентной диффузии

При моделировании процессов, сопровождаемых диффузионным массопереносом в многокомпонентных системах, необходимо знать распределение концентраций диффузионных компонентов. Диффузионный массоперенос описывается системой параболических дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = \frac{1}{r^q} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^q \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{D}_{ij} \frac{\partial C_j}{\partial r} \right), \quad (5)$$

где N – число компонентов сплава; r – пространственная координата; C_j – искомая концентрация j -го компонента; \tilde{D}_{ij} – парциальные коэффициенты взаимной диффузии; q – показатель степени, зависящий от симметрии задачи: 0 – для плоской, 1 – для цилиндрической, 2 – для сферической.

При использовании абсолютно устойчивой неявной разностной схемы система (5) сводится к СЛАУ с блочно-трехдиагональной матрицей [6]. Для i -го компонента в k -ом узле сетки

$$\sum_{j=1}^{N-1} \left[a_{ik}^j C_j(k-1) + c_{ik}^j C_j(k) + b_{ik}^j C_j(k+1) \right] = d_k^i,$$

где $a_{ik}^j, b_{ik}^j, c_{ik}^j, d_k^i$ – коэффициенты, рассчитываемые в зависимости от модели, $C_j(k)$ – концентрация j -го компонента в k -ом узле сетки.

[6]. Crank J. The Mathematics of Diffusion. Oxford: Clarendon press, 1975.

Параллельные алгоритмы решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами

Задачи электроразведки

1. Задача вертикального электрического зондирования (ВЭЗ).

На поверхности земли собирают электроразведочную установку из двух питающих (A,B) и двух приемных электродов (M,N) (рис. 6). К питающим электродам подключают источник тока, на приемных электродах измеряют напряженность электрического поля. По результатам измерений вычисляют кажущееся электр. сопротивление $\rho_k = K \cdot \Delta V_{MN} / I_{AB}$, для неоднородной среды, где K – коэффициент, зависящий от расстояний между электродами, ΔV_{MN} – разность потенциалов на приемных электродах, I_{AB} – сила тока в питающей линии.

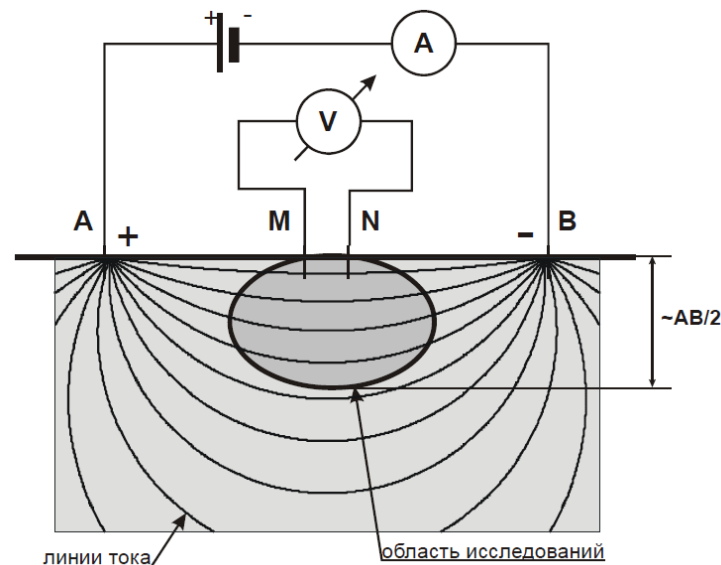


Рис. 6. Схема измерений в методе ВЭЗ

1. Задача ВЭЗ о нахождении потенциала $V_0(r, z = 0)$ на поверхности земли сводится к решению двумерного уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат [7]

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6)$$

с граничными условиями непрерывности потенциала и непрерывности нормальной составляющей к границам плотности тока

$$V_0|_{z=l} = V_1|_{z=l}, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial V_0}{\partial z} \Big|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=l} - \text{ условия на горизонтальных прямых } z=l, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 - \text{ сверху, } \quad \frac{\partial V_0}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 - \text{ слева, } \quad V_0 = 0 - \text{ справа и снизу.} \quad \rho = \frac{2\pi r^2}{I} \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right|.$$

После использования конечно-разностной аппроксимации краевая задача (6)–(7) сводится к решению СЛАУ с блочно-трехдиагональной матрицей.

2. Задача бокового каротажного зондирования (БКЗ) – при измерении потенциала электрического поля использует однотипные зонды разной длины. В результате интерпретации данных каротажа получают значение удельного электрического сопротивления пласта, близкое к истинному, по величинам которого выявляют полезные ископаемые. После конечно-разностной аппроксимации задача БКЗ сводится к решению СЛАУ с блочно-трехдиагональной матрицей [8]

$$AV \equiv -\frac{1}{r} \left(\bar{r} a V_{\bar{r}} \right)_r - \left(b V_{\bar{z}} \right)_z = F. \quad (8)$$

A – матрица размерности $(N_r \times 2N_z) \times (N_r \times 2N_z)$ с блоками $N_r \times N_r$.

$$a_{ij} = \sigma \left(r_i - \frac{h_i^{(r)}}{2}, z_j + \frac{h_j^{(z)}}{2} \right), \quad b_{ij} = \sigma \left(r_i + \frac{h_i^{(r)}}{2}, z_j - \frac{h_j^{(z)}}{2} \right), \quad \sigma = \frac{1}{\rho} - \text{ коэф. электропров.}$$

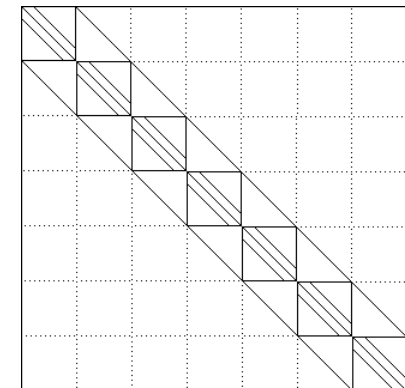


Рис.7.

[7]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

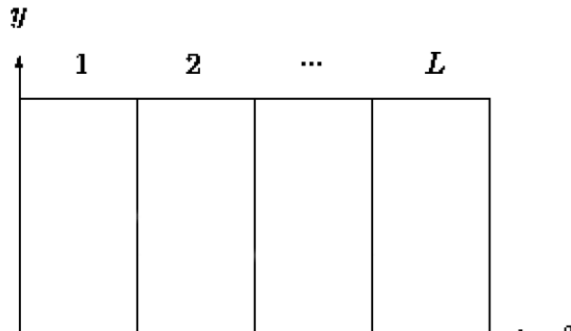
[8]. Дашевский Ю.А., Суродина И.В., Эпов М.И. Квазитрехмерное мат. моделирование диаграмм неосесимм. зондов постоянного тока в анизотропных разрезах // Сиб. ЖИМ. 2002. Т. 5. №3 (11). С. 76-91.

1. Параллельный алгоритм матричной прогонки

$$\begin{cases} C_0 \bar{Y}_0 - B_0 \bar{Y}_1 = \bar{F}_0, & i = 0 \\ -A_i \bar{Y}_{i-1} + C_i \bar{Y}_i - B_i \bar{Y}_{i+1} = \bar{F}_i, & i = 1, \dots, N-1 \\ -A_N \bar{Y}_{N-1} + C_N \bar{Y}_N = \bar{F}_N, & i = N, \end{cases} \quad (9)$$

где \bar{Y}_i и \bar{F}_i – искомые и заданные векторы размерности n , A_i, B_i, C_i – квадратные матрицы порядка n .

Будем предполагать, что исходная область P – прямоугольник. Разобьем P на L подобластей вертикальными линиями так, что $N = L \times M$. В качестве параметров выберем векторы \bar{Y}_K , $K = 0, M, \dots, N$, связывающие неизвестные на сетке по вертикали. В подобластях, определяемых интервалами $(K, K+M)$, рассмотрим задачи



$$\begin{cases} -A_i \bar{U}_{i-1}^1 + C_i \bar{U}_i^1 - B_i \bar{U}_{i+1}^1 = 0, & \bar{U}_K^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{U}_{K+M}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_i \bar{U}_{i-1}^n + C_i \bar{U}_i^n - B_i \bar{U}_{i+1}^n = 0, & \bar{U}_K^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \bar{U}_{K+M}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

Рис. 8.

$$\begin{cases} -A_i \bar{V}_{i-1}^1 + C_i \bar{V}_i^1 - B_i \bar{V}_{i+1}^1 = 0, & \bar{V}_K^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{V}_{K+M}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -A_i \bar{V}_{i-1}^n + C_i \bar{V}_i^n - B_i \bar{V}_{i+1}^n = 0, & \bar{V}_K^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \bar{V}_{K+M}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (11)$$

$$-A_i \bar{W}_{i-1} + C_i \bar{W}_i - B_i \bar{W}_{i+1} = \bar{F}_i, \quad \bar{W}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{W}_{K+M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = K+1, \dots, K+M-1. \quad (12)$$

Утверждение 1. Если $\bar{U}_1^1, \dots, \bar{U}_i^n$ – решения задач (10), $\bar{V}_i^1, \dots, \bar{V}_i^n$ – решения задач (11), \bar{W}_i – решения задачи (12), \bar{Y}_i – решения исходной задачи (9) на $(K, K+M)$, тогда

$$\bar{Y}_i = (\bar{U}_i^1 \bar{U}_i^2 \dots \bar{U}_i^n) \bar{Y}_K + (\bar{V}_i^1 \bar{V}_i^2 \dots \bar{V}_i^n) \bar{Y}_{K+M} + \bar{W}_i. \quad (13)$$

После подстановки (13) в (9) получим систему относительно параметров \bar{Y}_K , $K = 0, M, \dots, N$.

$$\begin{cases} [C_0 - B_0 U_1] \bar{Y}_0 - [B_0 V_1] \bar{Y}_M = \bar{F}_0 + B_0 \bar{W}_1, & K = 0; \\ -[A_K U_{K-1}] \bar{Y}_{K-M} + [C_K - A_K V_{K-1} - B_K U_{K+1}] \bar{Y}_K - [B_K V_{K+1}] \bar{Y}_{K+M} = \\ = \bar{F}_K + A_K \bar{W}_{K-1} + B_K \bar{W}_{K+1}, & K = M, 2M, \dots, N-M; \\ -[A_N U_{N-1}] \bar{Y}_{N-M} + [C_N - A_N V_{N-1}] \bar{Y}_N = \bar{F}_N + A_N \bar{W}_{N-1}, & K = N, \end{cases} \quad (14)$$

где U_K и V_K – квадратные матрицы порядка n .

Схема параллельного алгоритма матричной прогонки: (10)-(11)-(12) \rightarrow (14) \rightarrow (13).

Задача (14) решается классическим алгоритмом матричной прогонки.

Задачи (10)-(11)-(12) и (13) решаются независимо на L процессорах.

Утверждение 2. Если для исходной системы (9) выполняются достаточные условия устойчивости метода матричной прогонки по А.А. Самарскому [10]

$$\|C_0^{-1} B_0\| \leq 1, \quad \|C_N^{-1} A_N\| \leq 1, \quad \|C_i^{-1} A_i\| + \|C_i^{-1} B_i\| \leq 1, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

причем хотя бы одно из неравенств – строгое, то эти же условия достаточны и для устойчивости метода матричной прогонки при решении системы уравнений (14) относительно параметров \bar{Y}_K [9].

[9]. Акимова Е.Н. Распараллеливание алгоритма матричной прогонки // Математическое моделирование. М.: Наука, 1994. Т. 6. № 9. С. 61- 67.

[10]. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

2. Параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем

МСГ – быстрый итерационный метод решения СЛАУ с симметричной положительно-определенной матрицей [11]. Введение предобуславливания применяется с целью существ. ускорения сходимости итерационного процесса.

$$\text{Исходная СЛАУ } Ax = b \text{ заменяется на } C^{-1}Ax = C^{-1}b. \quad (15)$$

Условием выбора предобуславливателя C является следующее:

$$\text{cond}(\tilde{A}) \ll \text{cond}(A), \quad \text{cond}(\tilde{A}) = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}}{\tilde{\lambda}_{\min}}, \quad \text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad \tilde{A} = C^{-1}A.$$

Для СЛАУ (15) МСГ с предобуславливателем имеет вид [12]

$$\begin{aligned} r^0 &= b - Ax^0, & p^0 &= C^{-1}r^0, & z^0 &= p^0, & r^{k+1} &= r^k - \alpha_k Ap^k, & z^{k+1} &= C^{-1}r^{k+1}, \\ x^{k+1} &= x^k + \alpha_k p^k, & \alpha_k &= \frac{(r^k, z^k)}{(Ap^k, p^k)}, & p^{k+1} &= z^{k+1} + \beta_k p^k, & \beta_k &= \frac{(r^{k+1}, z^{k+1})}{(r^k, z^k)}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\|Az^k - b\|}{\|b\|} < \varepsilon \quad \text{— условие останова.}$$

Распаралеливание МСГ с предобуславливателем показано на рис. 2 (слайд 8).

[11]. Фаддеев В.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1963.

[12]. Амосов А.А. Циркулянтно предобусловленный метод сопряженных градиентов и его применение для численного решения интегрального уравнения переноса излучения // Труды XI Всерос. школы-семинара «Современные проблемы математического моделирования». Ростов-на-Дону: Издат. Ростов. госун-та, 2005. Выпуск 4. С. 49-65.

Результаты численных экспериментов решения задачи о нахождении распределения потенциала

Параллельный алгоритм матричной прогонки (ПАМП) и параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем (ПМСГ) реализованы на следующих многопроцессорных системах: МВС–1000/64 с помощью технологии MPI, 4-х ядерном процессоре Intel Core I5-750 (CPU) на языке C++ в среде разработки «Visual Studio» и видеоускорителе NVIDIA GeForce GTX 285 (GPU) с помощью технологии CUDA.

Тех. характеристики вычислительных систем приводятся на слайдах 7 и 13.

С помощью методов ПАМП и ПМСГ решена модельная задача о нахождении распределения потенциала в проводящей среде с известным решением (рис. 9).

Исходные данные и модельное решение задачи предоставлены лабораторией скважинной геофизики ИНГГ СО РАН (г. Новосибирск).

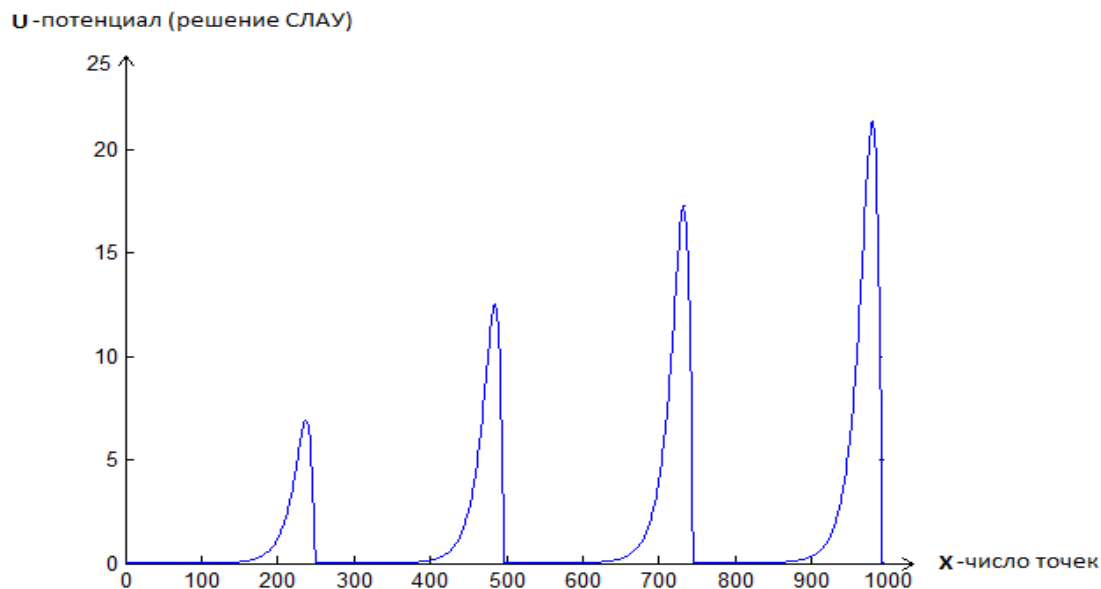
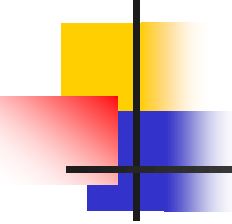


Рис. 9.



После дискретизации задача сводится к СЛАУ с плохо обусловленной симметричной положительно-определенной блочно-трехдиагональной матрицей размерности 76136×76136 с квадратными блоками порядка 248 (рис. 7, слайд 17).

Приближенное решение задачи сравнивалось с модельным решением с помощью вычисления относительной погрешности

$$\sigma = \frac{\|\bar{Y}^M - \bar{Y}^H\|}{\|\bar{Y}^M\|} \approx 2 \cdot 10^{-7}. \quad (17)$$

Предварительно находилось число обусловленности матрицы A

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \approx 1.3 \cdot 10^{11}, \quad \lambda_{\max} = 1.4 \cdot 10^6, \quad \lambda_{\min} = 1.1 \cdot 10^{-5} > 0,$$

В случае решения задачи ПМСГ находилось число обусловленности матрицы \tilde{A}

$$\text{cond}(\tilde{A}) = \frac{\tilde{\lambda}_{\max}}{\tilde{\lambda}_{\min}} \approx 4.1 \cdot 10^9 < \text{cond}(A).$$

Решение задачи методом ПМСГ $\sigma_{ПМСГ} \approx 2 \cdot 10^{-7}$ t=10 час.

Вычислитель	T_m (время, сек.)	S_m (ускор.)	E_m (эффект.)
Intel Core I5-750 (одно ядро)	57 (21-OpenMP)	—	—
Intel Core I5-750 (2 ядра)	46 (16-OpenMP)	1.24	0.62
Intel Core I5-750 (4 ядра)	42 (14-OpenMP)	1.5	0.40
GeForce GTX 285 (240 ядер)	16	3.56	—
MBC—1000/64 (1 проц.)	120	—	—
MBC—1000/64 (2 проц.)	65	1.85	0.92
MBC—1000/64 (4 проц.)	34	3.53	0.88

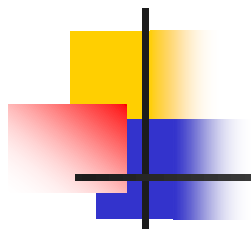
Решение задачи методом ПАМП $\sigma_{ПАМП} \approx 2 \cdot 10^{-7}$

Вычислитель	T_m (время, сек.)	S_m (ускор.)	E_m (эффект.)
Intel Core I5-750 (одно ядро)	52 (21-OpenMP)	—	—
Intel Core I5-750 (2 ядра)	28 (18-OpenMP)	1.86	0.93
Intel Core I5-750 (4 ядра)	16	3.25	0.81
GeForce GTX 285 (240 ядер)	10	5.2	—
MBC—1000/64 (1 проц.)	96	—	—
MBC—1000/64 (2 проц.)	60	1.6	0.80
MBC—1000/64 (4 проц.)	31	3.1	0.77



Основные результаты работы

1. Для решения линейной обратной задачи гравиметрии о восстановлении плотности в слое предложены и численно реализованы на **MBC-1000** и **видеоускорителях NVIDIA GeForce** параллельные итерационные алгоритмы. Решена обратная задача гравиметрии с реальными данными. Проведено сравнение времени счета параллельных алгоритмов с анализом эффективности и ускорения.
2. Для решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами предложены и численно реализованы на **видеоускорителе NVIDIA GeForce, 4-х ядерном процессоре Intel Core I5-750** и **MBC-1000** параллельный алгоритм матричной прогонки и параллельный метод сопряженных градиентов с предобуславливателем. Проведено сравнение времени счета параллельных алгоритмов при решении задачи о нахождении распределения потенциала на поверхности земли в проводящей среде.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !