Метод решения задачи сильной отделимости для многопроцессорных систем с массовым параллелизмом

А.В. Ершова
ershovaav@gmail.com
Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Задача разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников имеет большое значение теоретического и прикладного характера в распознавании образов, включающем задачи дискриминации, классификации и др. [1].

Задача сильной отделимости – это задача нахождения слоя наибольшей толщины, разделяющего выпуклые многогранники M и N $(M=\{x|Ax\le b\}\ne\emptyset,\ \ N=\{x|Bx\le d\}\ne\emptyset,\ \ M\cap N=\emptyset)$. Сильная отделимость, по существу, эквивалентна задаче отыскания расстояния между M и N в смысле метрики $\rho(M,N)=\min\{\|x-y\|\,|\,x\in M, y\in N\}$.

В работе [2] описан последовательный итерационный алгоритм решения задачи сильной отделимости на базе фейеровских отображений.

Рассмотрим метод построения параллельного алгоритма решения данной задачи, в основе которого лежит подход разбиения на подвекторы.

Пусть $\varphi(x)$ - произвольное фейеровское отображение относительно множества M, $\varphi\in\{R^n\to R^n\}$. Разобьем вектор $x\in R^n$ на r подвекторов $x=[x_1,\ldots,x_r]$, где $x_i\in R^{n_i}$ $(i=1,\ldots,r)$ и $R^n=R^{n_1}\times\ldots\times R^{n_r}$.

Обозначив через $\pi_i(x)$ проекцию x на R^i, определим отображения $\varphi_i(x)=\pi_i(\varphi(x))+\sum_{j\ne i}\pi_j(x)$ и положим $\bar\varphi(x)=\alpha\sum_{i=1}^{r}\pi_i(\varphi_i^t(x))$, $0<\alpha<1$ при некотором фиксированном натуральном t. При определенных условиях отображение $\bar\varphi$ будет M-фейеровским. Таким образом, на базе одного фейеровского отображения мы сконструировали другое, обладающее большим ресурсом параллелизма. Действительно, значения $\varphi_i^t(x)$ могут вычисляться независимо друг от друга для различных $i=1,\ldots,r$. При этом мы получаем две степени свободы для регулировки баланса загрузки процессорных узлов. Во-первых, увеличивая t, мы можем повышать вычислительную нагрузку на процессорный узел между двумя соседними итерациями, вычисляющими $\bar\varphi(x)$. Во-вторых, мы можем произвольным образом перераспределять координаты вектора x между процессорами.

Данный метод был реализован в виде программы на языке C++ с использованием пакета MPI-2.

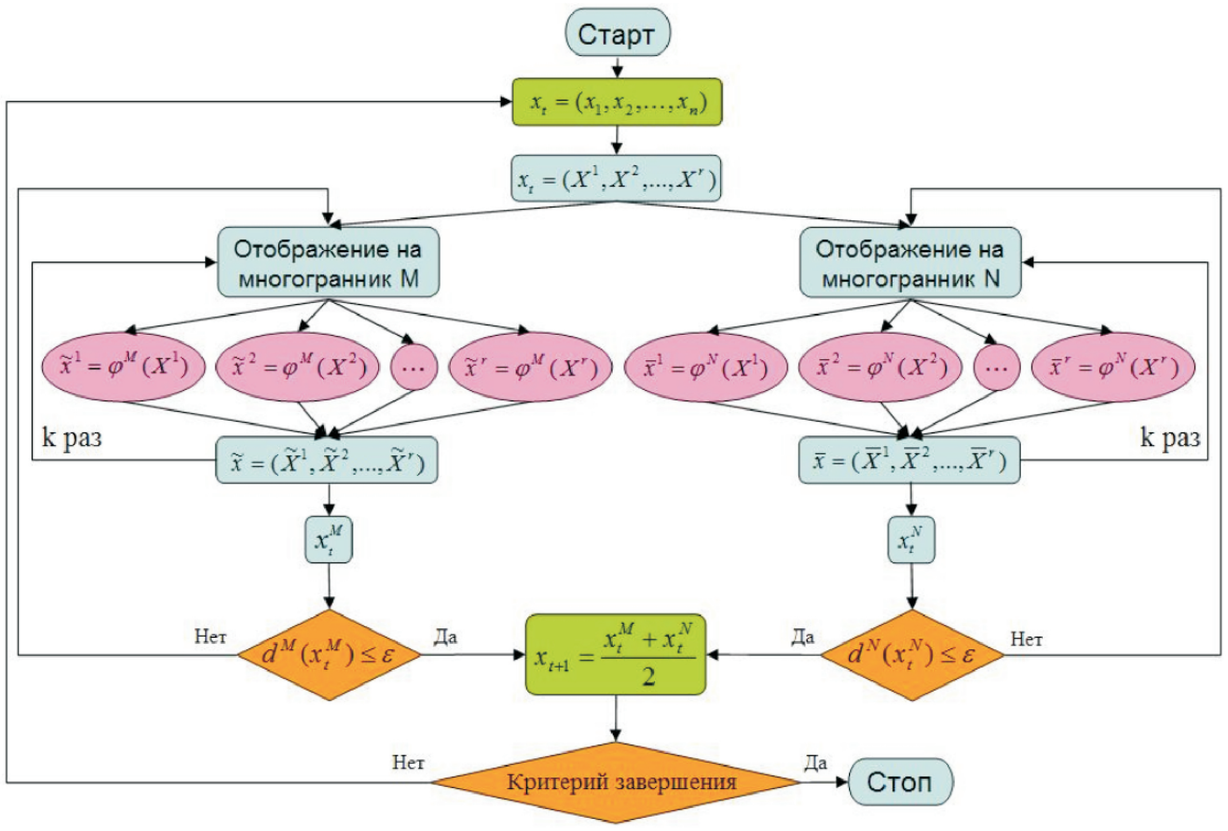
Вычислительные эксперименты проводились на сконструированных модельных масштабируемых задачах *Model-n*. Для всех таких задач можно легко аналитически вычислить точное значение толщины максимального разделяющего слоя. Поэтому они хорошо подходят для проверки корректности алгоритма, подбора оптимальных параметров и исследования масштабируемости. Вычисления проводились на суперкомпьютете «СКИФ Урал» (с кластерной архитектурой). В серии вычислительных экспериментов были исследованы зависимость времени решения и зависимость количества итераций от количества независимых без обменов итераций k, которое варьировалось от 1 до 200, задачи решались для размерностей n = 30, 60, 90. Графики показывают (рис. 1 и рис. 2), что для всех размерностей время решения задачи и количество итераций уменьшается с увеличением количества независимых без обменов итераций, принимая горизонтально-асимптотический характер для значений k, больших 120. Проведенные эксперименты демонстрируют, что в большинстве случаев хорошим выбором является значение k = 120.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что алгоритм может допускать эффективное масштабирование на тысячи процессорных узлов.

Литература

1. Еремин И.И. Фейеровские методы сильной отделимости выпуклых полиэдральных множеств // Известия вузов. Сер. математика. -2006. -№ 12. -С. 33-43.
2. Ершова А.В. Алгоритм разделения двух выпуклых непересекающихся многогранников с использованием фейеровских отображений // Системы управления и информационные технологии. -2009. -№1(35). -С. 53-56.

* Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00546а и грантом Роснауки по поддержке ведущих научных школ НШ-5595.2006.1



Пусть $\varphi\in\{R^n\to R^n\}$. Отображение φ называется *M-фейеровским*, если $\varphi(y)=y,\ \forall y\in M$; $\|\varphi(x)-y\|<\|x-y\|,\ \forall y\in M,\ \forall x\notin M$.

Последовательность $\{x_k\}\subset R^n$, $\{x_k\}\cap M=\emptyset$ называется M-фейеровской, если $\|x_{k+1}-y\|<\|x_k-y\|,\ \forall k,\ \forall y\in M$.

Пусть в R^n задана конечная система линейных неравенств

$$Ax\le b: l_j(x)=(a_j,x)-b_j\le 0,\ j=1,\ldots,m.$$

где $a_j\ne 0$ для любого j. Определим $l_j^+(x)$ следующим образом:

$$l_j^+(x)=\max\{l_j(x),0\},\ j=1,\ldots,m.$$

Тогда *фейеровское отображение* имеет вид:

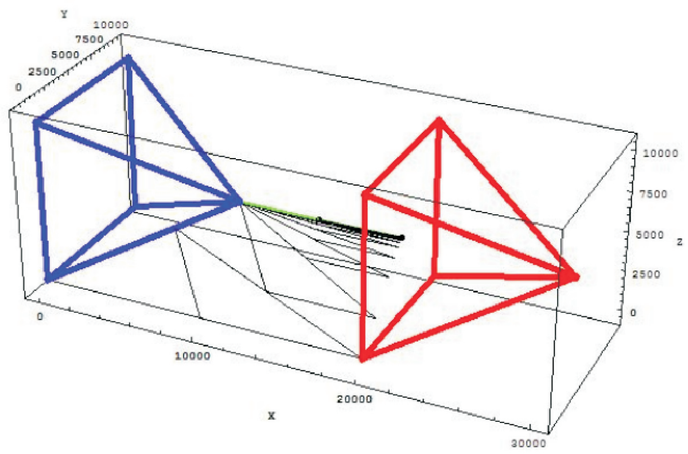
$$\varphi(x)=x-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\lambda_j\frac{l_j^+(x)}{\|a_j\|^2}a_j$$

для любой системы положительных коэффициентов $\{\alpha_j>0\}$, $j=1,\ldots,m$, таких, что $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=1$ и коэффициентов релаксации $0<\lambda_j<2$.

Задача *Model-n*. Система линейных неравенств для многогранников M и N соответственно:

$$\begin{cases} x_1-2x_2\le 0\\ x_1-2x_3\le 0\\ x_1-2x_4\le 0\\ \ldots\\ x_1-2x_n\le 0\\ x_1+2x_2\le 20000\\ x_1+2x_3\le 20000\\ x_1+2x_4\le 20000\\ \ldots\\ x_1+2x_n\le 20000\\ -x_1\le 0\\ -x_2\le 0\\ -x_3\le 0\\ \ldots\\ -x_n\le 0 \end{cases}\qquad \begin{cases} x_1-2x_2\le 20000\\ x_1-2x_3\le 20000\\ x_1-2x_4\le 20000\\ \ldots\\ x_1-2x_n\le 20000\\ x_1+2x_2\le 40000\\ x_1+2x_3\le 40000\\ x_1+2x_4\le 40000\\ \ldots\\ x_1+2x_n\le 40000\\ -x_1\le -20000\\ -x_2\le 0\\ -x_3\le 0\\ \ldots\\ -x_n\le 0 \end{cases}$$

Трехмерная иллюстрация фейеровских отображений для задачи *Model-n*.



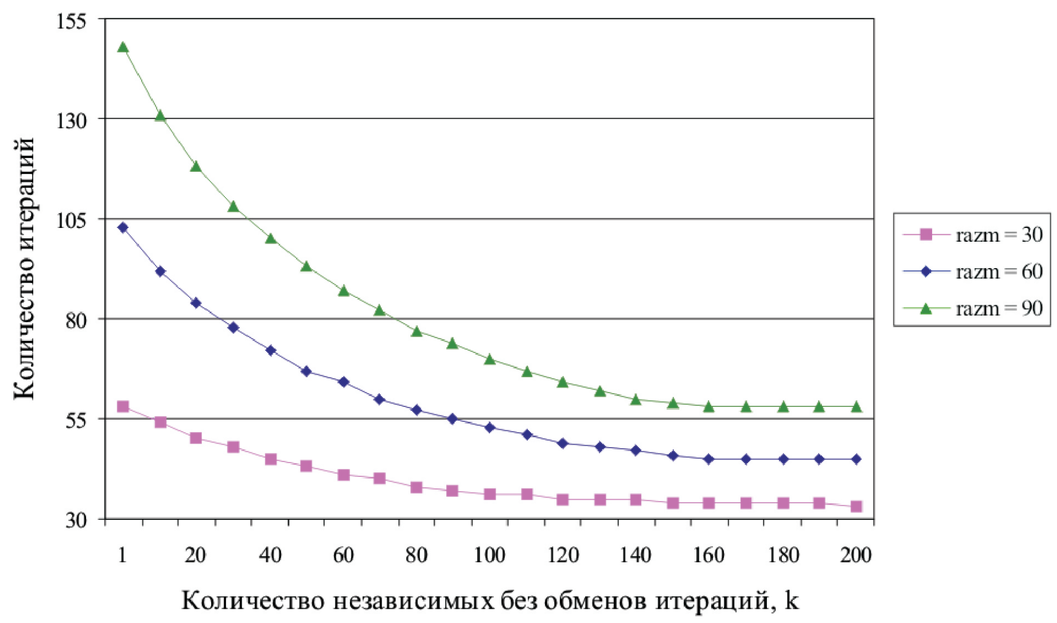


Рис. 1. Зависимость количества итераций от количества независимых без обмена итераций.

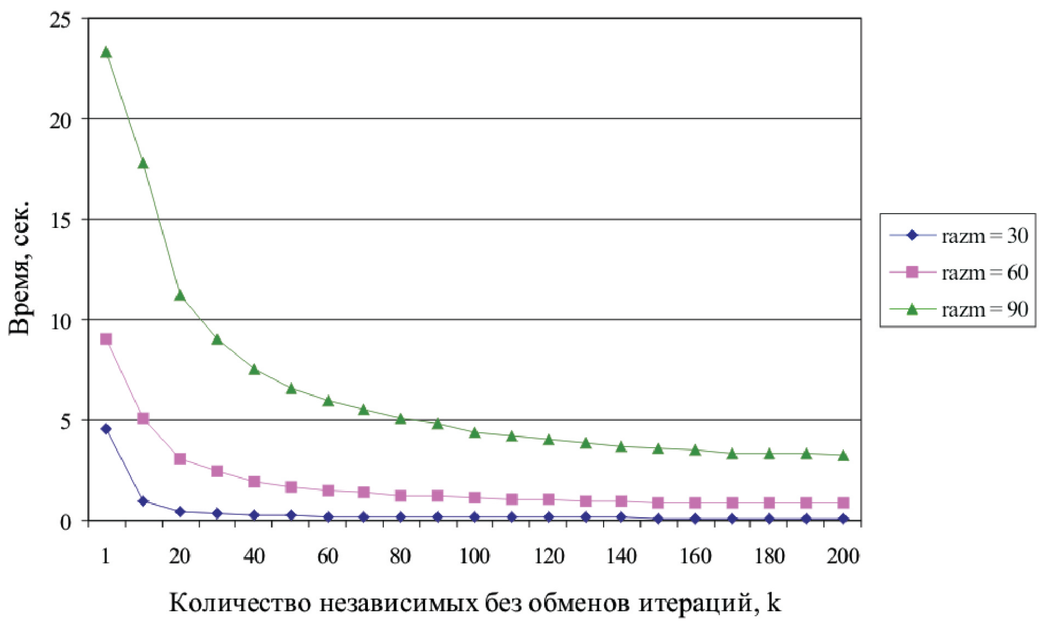


Рис. 2. Зависимость времени от количества независимых без обмена итераций.