

# Параллельная трехмерная TVD схема для решения задач гравитационной газовой динамики.

Б.П. Рыбакин

В данной работе предложен параллельный метод, основанный на схеме типа TVD, для решения трехмерных уравнений газодинамики. Такие уравнения часто используются в астрофизике. Численные схемы, применяемые для их решения должны максимально точно воспроизводить поведение вещества в окрестностях больших разрывов и достоверно описывать малые возмущения вдали от фронтов ударных волн. Для решения таких противоречивых требований используют разностные схемы, которые сочетают в себе повышенную разрешающую способность в областях малых возмущений и монотонность в областях сильных разрывов.

## 1. Введение

Моделирование взрывов сверхновых звезд относится к числу сложных динамических процессов, требующих применения разностных схем повышенной разрешающей способности. Эти схемы должны максимально точно воспроизводить поведение вещества в окрестностях больших разрывов и достоверно описывать малые возмущения вдали от фронтов ударных волн. Такие требования приводят к необходимости снижения диссипативных свойств численных методов, а это, в свою очередь, приводит к появлению больших осцилляций за фронтами ударных волн.

Для решения таких противоречивых требований используют разностные схемы, которые сочетают в себе повышенную разрешающую способность в областях малых возмущений и монотонность в областях сильных разрывов. К таким схемам относятся схемы TVD, ENO, WENO, PPM и другие.

### 1.1. Магниторотационный механизм взрыва сверхновой

В работе [1] был предложен механизм магниторотационного взрыва сверхновой. Основной идеей магниторотационного взрыва является учет перехода энергии вращающегося магнитного поля в радиальную кинетическую энергию взрыва. Во время коллапса различные слои звезды вращаются с разными угловыми скоростями. Такое дифференциальное вращение приводит к появлению и усилению тороидальных компонент магнитного поля. Рост напряженности магнитного поля приводит к усилению давления. Вблизи области экстремального магнитного давления появляется волна сжатия. Эта волна начинает двигаться от центра по быстро спадающей плотности вещества. За достаточно короткое время это приводит к появлению быстрой магнитогидродинамической ударной волны. Когда ударная волна достигает поверхности коллапсирующей звезды, она выбрасывает ее вещество. Этот выброс можно интерпретировать как взрыв сверхновой звезды. Моделирование магниторотационного взрыва сверхновой звезды в одномерной постановке было сделано, в частности в работах [2] и [3]. В одномерном случае звезда может быть представлена как бесконечный цилиндр. Было использованы уравнения идеальной магнитной гидродинамики с самогравитирующим веществом в лагранжевой системе координат.

Начальное магнитное поле имело только радиальную компоненту. Дифференциальное вращение привело к появлению и усилению тороидальной компоненты магнитного поля. Численное моделирование магниторотационного взрыва сверхновой в одномерной постановке показывает, что дифференциальное вращение тороидального поля приводит к по-

---

<sup>1</sup>Данная статья написана при поддержке гранта РФФИ- Молдова (ИКИ АН России - ИМИ АН Молдавии) 08.820.06.40 RF.

явлению МГД ударных волн, движущихся к поверхности звезды. Моделирование взрыва сверхновой звезды в двумерной постановке дает более реалистическую картину течения, чем одномерное. Первое двумерное моделирование коллапса вращающейся звезды с учетом магнитного поля было сделано в работе [4]. Величина магнитного поля в работе была нереалистично большой. Дифференциальное вращение и большое значение магнитного поля привело к формированию аксиального выброса вещества.

В данной работе рассматривается моделирование магниторотационного взрыва сверхновой звезды в трехмерной постановке. Трехмерная модель коллапса наиболее реалистична и не имеет ограничений, связанных с допущениями, принятыми в 1D и 2D моделях. Трехмерные модели позволяют моделировать магниторотационный взрыв сверхновой в случаях, когда оси вращения и оси дипольного магнитного поля (если диполь берется как начальное значение магнитного поля) не совпадают. Использование численных методов, применяемых для моделирования двумерного случая, приводит в трехмерном случае к большим проблемам. В двумерном случае вещество звезды сжимается в направлении  $\varphi$ . Для моделирования взрыва протонейтронной звезды необходимо просчитать сотни и тысячи циклов вращения. Вращение вещества протонейтронной звезды происходит очень дифференцировано. Если трехмерная лагранжевая сетка содержит тетрагональные элементы, то сетку приходится перестраивать на каждом шаге по времени. Перестройка сетки приводит к переинтерполяции сеточных функций на новую сеточную структуру. Использование прямоугольных эйлеровых сеток позволяет обойти эту проблему. В работе [5] предложена трехмерная модель коллапсирующей звезды в прямоугольной декартовой системе координат.

## 1.2. Схемы TVD

В данной работе будем рассматривать схемы типа TVD первого и второго порядка точности. Разностные схемы первого порядка точности сохраняют свойство монотонности, но часто приводят к сильному размазыванию фронтов ударных волн. Нелинейные схемы второго порядка точности с ограничением общей вариации (TVD - Total Variation Diminution) позволяют проводить, с большим разрешением, расчеты ударных волн и предотвращать нефизические осцилляции за их фронтом. Такие схемы имеют разный порядок точности в областях с большими и малыми разрывами. Применение таких схем в трехмерной постановке дает особенно хорошие результаты при проведении расчетов коллапсирующих звезд.

Уравнения, описывающие гидродинамическое движение, представляют собой законы сохранения массы, количества движения и энергии [6]. В консервативной форме систему уравнений гидродинамики в эйлеровой системе координат можно записать в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0, \quad (0)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j + P \delta_{ij}) = 0, \quad (0)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(e + P) v_i] = 0. \quad (0)$$

В уравнениях (1.2 - 1.2) опущено влияние гравитационного поля, а также влияние других источников энергии, таких как нейтринное излучение и т.д. Уравнение состояния запишем в виде:

$$P = (\gamma - 1)\varepsilon, \quad (0)$$

В этих уравнениях  $\rho$  плотность,  $v$  - векторное скорости и  $P$  давление, полная энергия  $e = \frac{1}{2}\rho v^2 + \varepsilon$ .

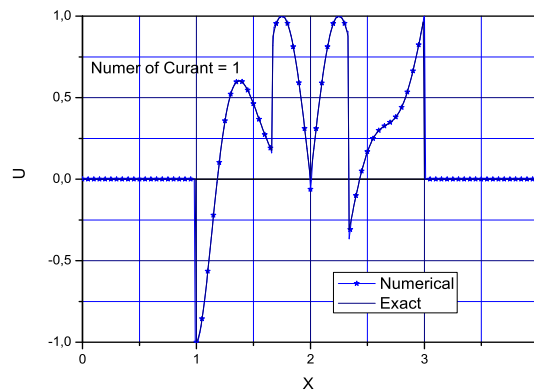
Уравнения (1.2 - 1.2) решаются с помощью TVD схемы [7, 8]. Условие общего ограничения осцилляций является нелинейным условием устойчивости. В схеме TVD для дискрет-

ного решения его можно определить как:

$$TV(u^t) = \sum_{i=1}^N |u_{i+1}^t - u_i^t| \quad (0)$$

есть мера общего количества осцилляций  $u$ .

Нелинейные TVD схемы второго порядка точности можно записать, используя потоки второго порядка точности  $F_{i+1/2}^{(2)t}$  на границах ячеек. Они получаются из потоков первого порядка точности  $F_{i+1/2}^{(1)t}$  для противопотоковой схемы с помощью коррекции второго порядка точности. Поток первого порядка точности получается из средних значений потока  $F_i^t$  [9]. Коррекция второго порядка точности вводится для ограничения ложных осцилляций решения. То есть количество осцилляций на  $n+1$  шаге по времени не должно превосходить количество осцилляций на  $n$  шаге по времени  $TV(u_{i+1}) \leq TV(u_i)$ .



**Рис. 1.** Результаты расчетов по схеме TVD с ограничителем потока vanLeer (отмечено звездочками) по сравнению с аналитическим решением (сплошная линия).

Для подавления осцилляций используются различные ограничители (limiters) - minmod, superbee, vanLeer. Ограничитель minmod позволяет выбрать наименьшее абсолютное значение между левой и правой коррекциями:

$$\text{minmod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sign}(a) + \text{sign}(b)] \min(|a|, |b|). \quad (0)$$

Ограничитель superbee позволяет выбрать наилучшую коррекцию из:

$$\text{superbee}(a, b) = \begin{cases} \text{minmod}(a, 2b), & \text{if } |a| \geq |b|, \\ \text{minmod}(2a, b), & \text{if } |a| < |b|. \end{cases} \quad (0)$$

Ограничитель vanLeer позволяет найти гармоническое среднее между правой и левой коррекциями:

$$\text{vanleer}(a, b) = \frac{2ab}{a + b}.$$

Для проверки полученной программы был использован тест, предложенный в [7]:

$$u_0 = \begin{cases} -x \sin(\frac{3}{2}\pi x^2), & -1 \leq x < -\frac{1}{3}, \\ |\sin(2\pi x)|, & |x| < \frac{1}{3}, \\ 2x - 1 - \frac{1}{6} \sin(3\pi x), & \frac{1}{3} < x < 1. \end{cases} \quad (0)$$

На Рис. 1 приведены результаты численных расчетов, проведенных по схеме TVD с ограничителями потока vanLeer (на рисунке отмечено звездочками) и аналитического решения (сплошная линия). Число Куранта - Фридрихса - Леви равно CFL=1. Отметим хорошее совпадение численного решения с аналитическим [8].

### 1.3. Уравнения гравитационной газовой динамики

Решение уравнений гравитационной газовой динамики, которые описывают процесс коллапса звезды можно записать в виде:

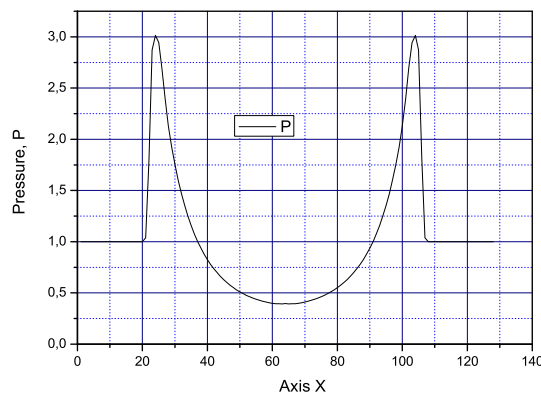
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0, \quad (0)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i v_j + P \delta_{ij}) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (0)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [(e + P)v_i] = -\rho v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (0)$$

В этом уравнении значение гравитационного потенциала  $\phi$  определяется из уравнения Пуассона:  $\Delta \phi = 4\pi G \rho$ . Уравнение состояния будем использовать в виде (1.2). В приведенных выше уравнениях  $\rho$  - плотность,  $v$  - поле скоростей,  $P$  - давление,  $\varepsilon$  - удельная внутренняя энергия,  $e$  - полная энергия:

$$e = \frac{1}{2} \rho v^2 + \varepsilon \quad (0)$$

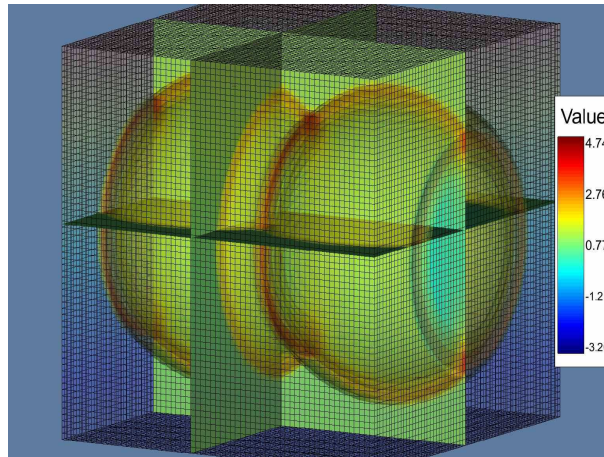


**Рис. 2.** График давления для тестовой задачи Седова - Тейлора о точечном взрыве.

Тестирование схемы TVD осуществлялось с помощью задачи Седова - Тейлора о точечном взрыве. Для этого расчетная область была задана в виде куба со стороной равной 128 ячеек. Внутренность куба заполнена однородной средой с плотностью  $\rho_1$ , давление пренебрежимо мало. В момент времени  $t=0$  происходит мгновенное выделение энергии в центре расчетной области. На Рис. 2 приведен график давления на момент времени  $t = t^*$ . Отметим хорошее совпадение результатов численных расчетов с аналитическим решением.

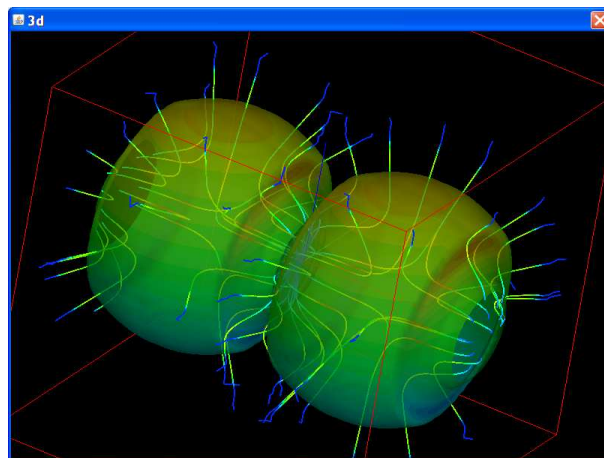
### 1.4. Основные результаты

Рассмотрим случай взаимодействия двух ударных волн. Для этого в центре куба разместим два источника энергии. В начальный момент времени происходит мгновенное выделение энергии такой же мощности, как и в первом случае. Сложность этого теста заключается в необходимости точного расчета двух взаимодействующих ударных волн. В астрофизических расчетах этот тест часто используется, как основа для моделирования взрывов сверхновых звезд.



**Рис. 3.** Распределение давления для взаимодействующих ударных волн.

На Рис. 3 приведен график давления для задачи (1) - (3). Начальная плотность  $\rho_0 = 1.0$ , начальная энергия  $= 10^5$ . Задача решается на декартовой сетке не инвариантной относительно вращения. Несмотря на это, анизотропный разброс мал. Отметим, что численное решение имеет сферически симметричную форму. Разрешение фронта ударной волны равно размеру двух пространственных ячеек. Проведенное тестирование разностной схемы показывает, что схему TVD можно применять для решения задач о взрыве сверхновых звезд.



**Рис. 4.** Распределение плотности и траектории частиц для сетки 1024x1024x1024.

Для повышения точности численных расчетов и улучшения эффективности алгоритмов, в последнее время используют методы адаптивных сеток (AMR). Такие подходы позволяют в десятки раз сокращать затраты компьютерного времени и объем используемой памяти. Эти методы особенно эффективны в задачах газовой динамики, где возникают скачки уплотнения, ударные волны и контактные разрывы. Применение адаптивных сеток позволяет исследовать процессы с желаемой степенью точности в областях со сложной геометрией или большими градиентами. Метод AMR позволяет уменьшить общее число ячеек и, соответственно, общее время расчета. Технология AMR основана на использовании иерархической структуры ячеек. При этом, каждому уровню иерархии соответствует свой уровень пространственного и временного разрешения. Особенностью такой организации является возможность локально, динамическим образом добавлять ячейки в сетку в данном месте расчетной области. В работе предложен алгоритм разбиения расчетной сетки на несколько подуровней с последовательно уменьшаемыми шагами по пространству.

Для решения уравнения Пуассона в трехмерном случае использовались вложенные сетки [10, 11]. Плотность вещества в коллапсирующей звезде меняется на много порядков. На поверхности плотность вещества небольшая. В центре порядок плотности вещества возрастает до  $10^{14} \text{ g/cm}^3$ . Для того, чтобы учесть такое изменение плотности были построены вложенные уточняемые сетки. В центре расчетной области выделялся куб, с размерами ячеек в  $2^3$  раза меньшими, чем исходный размер ячейки. В центре этого куб строился куб с уменьшенными размерами ячеек. Каждый вложенный куб имел размеры  $M^3$ , где  $M$  менялось в диапазоне от 64 до 1024 ячейки. Решение уравнения Пуассона находилось методом последовательной сверхрелаксации.

На Рис. 4 приведены графики плотности и траектории частиц для двух взаимодействующих ударных волн. Вычисления проводились на сетке размером  $1024 \times 1024 \times 1024$  ячеек. Был построен параллельный алгоритм для решения гидродинамических уравнений и решения уравнения Пуассона [11]. Алгоритм эффективно работает на 8 - 12 процессорах. Для большего количества процессоров эффективность вычислений снижается. Расчеты проводились на кластере Института математики и информатики АН Молдовы.

## 1.5. Заключение

В работе предложен параллельный алгоритм и программа для решения трехмерных уравнений гравитационной газовой динамики. Для этого использовалась схема TVD с высоким разрешением на фронтах ударных волн и больших градиентов. Приведены результаты численных расчетов, полученных на последовательности вложенных сеток. Расчеты проводились на сетках  $1024 \times 1024 \times 1024$  и до 5 уровней вложенности. Показано, что алгоритм эффективно распараллеливается на 8 - 12 процессоров.

## Литература

1. Bisnovatyi-Kogan G.S. 1970, *Astron. Zh.* 47, 813.
2. Ardeljan N.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Kosmachevskii K.V., Moiseenko S.G. 2004, *Astrophysics* 47, 1
3. Ardeljan N.V., Bisnovatyi-Kogan G.S., Moiseenko S.G., 2005, *MNRAS* 359, 333
4. Leblanc L.M., Wilson J.R. 1970, *ApJ.* 161, 541.
5. Bisnovatyi-Kogan G.S., Moiseenko S.G., Rybakin B.P., Secieru G.V. Modeling of explosive magnetorotational phenomena: from 2D to 3D. *Buletinul ACM, Matematica*, N.2(42), 2007, pp. 113-122.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. 1987, 733 стр.
7. Harten A., *J. Comp. Phys.* **49**, (1983), pp. 357-365.
8. Рыбакин Б.П. Численные методы для многопроцессорных ЭВМ. Кишинев, Из-во МолдГУ, 338 стр.
9. Hu Trac, Ue-Li Pen. A Moving Frame Algorithm for High Mach Number Hydrodynamics. arXiv:asrto-ph/0309599v2 24 Sep 2003.
10. Rybakin B. Construction of a Parallel TVD Method for the Solution of the 3-D Hydrodynamical Equations. Conference Mathematics and Information Technologies: Research And Education, Chisinau, October 1-4, 2008, 41-42 pp.
11. Рыбакин Б.П. Параллельная реализация решения трехмерных уравнений Пуассона на структурированных адаптивных сетках для моделирования взрыва сверхновой звезды.

Международная конференция "Научный сервис в сети INTERNET. Технологии параллельного программирования Абрау-Дюрсо, сентябрь 18-23, 2007 г. 73-75 стр.