ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТЕЛ

А.А.Абдукодиров

В работе приводится способы применения параллельных алгоритмов для моделирования процесса деформирования многослойных упругих прямоугольных тел. В качестве метода используется метод Филоненко-Бородича-Ионова. Тестовые примеры были апробированы на ЛВС в среде Borland C++ 6.0, а для визуализации результатов используется пакет Maple 11.

Введение

Одной из основных сфер применения вычислительных систем в настоящее время являются фундаментальные научные и прикладные задачи, эффективное решение которых возможно только с использованием мощных вычислительных ресурсов.

Примером могут служить задачи нелинейной механики деформируемого твердого тела методом напряжений[1]; моделирование и расчет температурных напряжений в сверхбольших интегральных схемах (чипах)[2] и др.

Применение различных численных методов, в частности метода напряжений [1], метода конечных элементов (МКЭ) [3] и метода граничных элементов (МГЭ)[4], для решения задач механики сплошных сред и теоретической физики приводит к разрешающим системам линейных и нелинейных алгебраических уравнений, которые часто имеют очень высокий порядок (несколько десятков и сотен тысяч). Для решения проблемы применяются различные технологии, в частности технология MPI[5], с использованием вычислительных кластеров различных уровней.

1.Постановка задачи и теоретические основы метода

Рассмотрим упругое трехмерное тело с объемом V, ограниченной поверхностью S, состоящее из скрепленных между собой слоев, каждый из которых в частном случае имеет форму параллелепипеда, отнесенного к прямоугольной системе координат $Oxyz$ и находящееся в равновесном состоянии под действием массовых сил $R(x,y,z)$, температурного поля $T(x,y,z)$ и поверхностных нагрузок $P(x,y,z)$. Необходимо рассчитать напряженно-деформированное состояние тела. В качестве теоретической базы для построения математической модели исходной постановки задачи принята модель первой граничной задачи теории упругости которая описывается следующими уравнениями (без учета объемных сил):

$A\sigma = 0$ - уравнение равновесия; (1)

$A_s\sigma = P_{s\nu}$ - граничные условия на части поверхности S; (2)

$\sigma_{33}^{i} = \sigma_{33}^{i+1}, \sigma_{23}^{i} = \sigma_{23}^{i+1}, \sigma_{31}^{i} = \sigma_{31}^{i+1}$ - условиям непрерывности напряжений между слоями; (3)

$B\varepsilon = 0$ - уравнение неразрывности деформаций; (4)

$\varepsilon = \Phi\sigma$ (5)

$\sigma = \{\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}\}^{T}$ - компоненты искомого тензора напряжений;

$\varepsilon = \{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}\}^{\mathrm{T}}$ - компоненты тензора деформаций;

$P = \{P_{x\nu}P_{y\nu}P_{z\nu}\}^{\mathrm{T}}$ - вектор поверхностных нагрузок;

Т - знак транспонирования;

$$A = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \qquad (6)$$

- матрица дифференцирования первого рода;

$$A_s = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix} \qquad (7)$$

- матрица направляющих косинусов;

$$\Phi = \frac{1}{\mathrm{E}} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \qquad (8)$$

- матрица упругих коэффициентов;

$$B = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial y^2 & \partial^2/\partial x^2 & 0 & -\partial^2/\partial y\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial^2/\partial z^2 & \partial^2/\partial y^2 & 0 & -\partial^2/\partial y\partial z & 0 \\ \partial^2/\partial z^2 & 0 & \partial^2/\partial x^2 & 0 & 0 & -\partial^2/\partial z\partial x \\ 0 & 0 & -2\partial^2/\partial y\partial x & -\partial^2/\partial z^2 & \partial^2/\partial z\partial x & \partial^2/\partial y\partial z \\ -2\partial^2/\partial y\partial z & 0 & 0 & \partial^2/\partial z\partial x & -\partial^2/\partial x^2 & \partial^2/\partial y\partial x \\ 0 & -2\partial^2/\partial z\partial x & 0 & \partial^2/\partial y\partial z & \partial^2/\partial y\partial x & -\partial^2/\partial y^2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

- матрица дифференцирования второго рода,

μ - коэффициент Пуассона; Е - модуль Юнга.

В такой постановке моделирование напряженного состояния тела представляет определенные трудности, поэтому очень часто применяется приближенные методы. Общим для всех приближенных методов является то, что они сводятся к системам алгебраических уравнений.

2.Алгоритм решения задачи

Одним из приближенных методов решения поставленной задачи является метод Филоненко-Бородича-Ионова [6,7], суть которого заключается в представлении искомого тензора напряжений в виде:

$$\sigma = \sigma^{(o)} + \sigma^{(\kappa)} \tag{10}$$

где $\sigma^{(o)} = \left\{\sigma_{11}^{(o)}\, \sigma_{22}^{(o)}\, \sigma_{33}^{(o)}\, \sigma_{12}^{(o)}\, \sigma_{23}^{(o)}\, \sigma_{31}^{(o)}\right\}^{\mathrm{T}}$ - основной тензор напряжений, компоненты которого должны удовлетворять заданным краевым условиям (2); $\sigma^{(k)} = \left\{\sigma_{11}^{(k)}\, \sigma_{22}^{(k)}\, \sigma_{33}^{(k)}\, \sigma_{12}^{(k)}\, \sigma_{23}^{(k)}\, \sigma_{31}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}$ - корректирующий тензор, содержащий неизвестные коэффициенты, подлежащие определению, компоненты которого должны удовлетворять уравнениям равновесия (1), условиям непрерывности напряжений(3) и неразрывности деформаций(4).

Очевидно, что в подобной постановке определение напряженного состояния представляет значительные трудности. Поэтому предлагается заменить её на равносильную вариационную постановку задачи, т.е., используя вариационный принцип Кастильяно[6]:

$$\frac{1}{2}\delta\int_{\mathrm{V}} (\sigma)^{\mathrm{T}}\varepsilon\ \mathrm{dV} = 0 \tag{11}$$

Поскольку тело имеет слоистую структуру, т.е. $V = V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots \bigcup V_t$, $t-$ количество слоев, то для всего тела вместо (11) будем иметь

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\delta\int_{V_i}(\sigma)_i^t(\varepsilon_i)dV_i = 0 \tag{12}$$

Отсюда, используя (2),(5),(10) и учитывая, вариация от компонент основного тензора и объемных сил равняется нулю, получим вариационное уравнение относительно неизвестных D_n , подлежащих определению

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\int_{V_i}\frac{\partial}{\partial D_n}\left(\sigma^{(k)}\right)_i(\Phi)_i\left(\sigma^{(k)}\right)_i dV_i = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\int_{V_i}\frac{\partial}{\partial D_n}\left(\sigma^{(k)}\right)_i(\Phi)_i\left(\sigma^{(0)}\right)dV_i \tag{13}$$

Функции форм решений участвующих в (10) согласно [8] можно брать в зависимости от одной, двух или трех функций напряжений.

В качестве функции форм решений зависящие от одной функции напряжений приводится в виде (их три)

$$\begin{gathered}\sigma_{ii}^{(k)} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2};\ \sigma_{jj}^{(k)} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2};\ \sigma_{ll}^{(k)} = 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\\ \sigma_{ij}^{(k)} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j};\ \sigma_{il}^{(k)} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_l};\sigma_{jl}^{(k)} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_l}\end{gathered} \tag{14}$$

Для представления функции форм решений зависящие от двух функций напряжений приводиться в виде (их три)

$$\begin{gathered}\sigma_{ii}^{(k)} = 2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_j\partial x_l};\ \sigma_{jj}^{(k)} = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_l^2};\ \sigma_{ll}^{(k)} = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_j^2};\\ \sigma_{ij}^{(k)} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i\partial x_l};\ \sigma_{jl}^{(k)} = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_j\partial x_l};\ \sigma_{il}^{(k)} = -\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_i\partial x_j}.\end{gathered} \tag{15}$$

Для представления функции форм решений зависящие от трех функций напряжений приводиться в виде (их семнадцать):

$$\sigma^{(k)} = \mathrm{H}\varphi \tag{16}$$

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 0 & \partial^2/\partial z^2 & \partial^2/\partial y^2 & 0 & -2\partial^2/\partial y\partial z & 0 \\ \partial^2/\partial z^2 & 0 & \partial^2/\partial x^2 & 0 & 0 & -2\partial^2/\partial x\partial z \\ \partial^2/\partial y^2 & \partial^2/\partial x^2 & 0 & -2\partial^2/\partial y\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial^2/\partial x\partial y & -\partial^2/\partial z^2 & \partial^2/\partial x\partial z & \partial^2/\partial z\partial y \\ -\partial^2/\partial y\partial z & 0 & 0 & \partial^2/\partial x\partial z & -\partial^2/\partial x^2 & \partial^2/\partial x\partial y \\ 0 & -\partial^2/\partial z\partial x & 0 & \partial^2/\partial y\partial z & \partial^2/\partial y\partial x & -\partial^2/\partial y^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

- матрица дифференцирования.

Здесь $\varphi = \{f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\}^{\mathrm{T}}$ - искомые функции напряжений от трех пространственных переменных соответствующим семнадцати формам решений:

1-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ f_2\ f_3\ 0\ 0\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

2-я форма представления : - $\varphi = \{0\ 0\ 0\ f_1\ f_2\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

3-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ f_2\ 0\ f_3\ 0\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

4-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ f_2\ 0\ 0\ f_3\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

5-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ f_2\ 0\ 0\ 0\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

6-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ 0\ f_2\ f_3\ 0\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

7-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ 0\ f_2\ 0\ f_3\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

8-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ 0\ f_2\ 0\ 0\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

9-я форма представления : - $\varphi = \{0\ f_1\ f_2\ f_3\ 0\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

10-я форма представления : - $\varphi = \{0\ f_1\ f_2\ 0\ f_3\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

11-я форма представления : - $\varphi = \{0\ f_1\ f_2\ 0\ 0\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

12-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ 0\ 0\ f_2\ f_3\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

13-я форма представления : - $\varphi = \{f_1\ 0\ 0\ 0\ f_2\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

14-я форма представления : - $\varphi = \{0\ f_1\ 0\ f_2\ 0\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

15-я форма представления : - $\varphi = \{0\ f_1\ 0\ 0\ f_2\ f_3\}^{\mathrm{T}}$;

16-я форма представления : - $\varphi = \{0\ 0\ f_1\ f_2\ f_3\ 0\}^{\mathrm{T}}$;

17-я форма представления : - $\varphi = \{0\ 0\ f_1\ f_2\ 0\ f_3\}^{\mathrm{T}}$.

Первая форма представления соответствует форме предложенное Максвеллом[6], вторая форма представления соответствует форме предложенное Морерой[6], а остальные соответствуют формам предложенные Блохом[9].

Соответственно выбранной формы решений согласно(14)-(16), функции напряжений представим в виде:

$$\varphi_{\beta} = \sum_{m}\sum_{n}\sum_{p} D_{mnp}^{(\beta)} \chi_{m\beta 1}(x)\chi_{n\beta 2}(y)\chi_{p\beta 3}(z) \quad , \tag{18}$$

Где $\beta = 1,2,3;\quad D_{mnp}^{(1)} = A_{mnp}$, $D_{mnp}^{(2)} = B_{mnp}$, $D_{mnp}^{(3)} = C_{mnp}$ - искомые параметры;

$m, n, p = 1, 2, 3, \cdots,$ - количество приближений; $\chi_{m\alpha\beta}(x)$, $\chi_{n\alpha\beta}(y)$, $\chi_{p\alpha\beta}(z)$ - координатные функции, подлежащие предварительному выбору, удовлетворяющие следующим условиям:

при $t = t_{\gamma}^{i}$

$$\chi_{i\alpha\beta}(t) = 0, \frac{\partial \chi_{\alpha\beta i}}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

$t_{\gamma}^{1} = x$, $t_{\gamma}^{2} = y$, $t_{\gamma}^{3} = z$; $\alpha, \beta, i = 1,2,3, \ \gamma = 1,2.$

Система этих функций должна быть полной и к этому классу относятся: косинус биномы, введенные Филоненко-Бородичем [6], и балочные функции, введенные Л.Е.Мальцевым[10], квазиполиномиальные функции, введенные Б.А.Бондаренко[11].

Подставляя выражения любых из форм, приведенных в (14) - (16) с учетом (18), в (10) и заменой варьирование на дифференцирование по неизвестным параметрам получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{mnp}\left[\sum_{l=1}^{N} F_{\beta l}(mnpijk) D_{mnp}^{(l)}\right] = L_{\beta}(ijk), \tag{20}$$

Здесь $l = N * m * n * p$ - порядок системы, $N -$ количество зависимости от функций;

$$F_{\beta l}(mnpijk) = F_{\beta}^{(1)}(mnpijk) - 2\mu F_{\beta}^{(2)}(mnpijk) \ ;$$

$$L_{\beta}(ijk) = L_{\beta}^{(1)}(ijk) - 2\mu L_{\beta}^{(2)}(mnpijk) + L_{\beta}^{(3)}(ijk);$$

$$F_{\beta}^{(1)}(mnpijk) = \frac{1}{2E}\int_{V}\left\{2\left[\sigma_{11}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{22}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{33}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[\sigma_{12}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{23}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{23}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{31}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{31}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right]\right\} dV,$$

$$F_{\beta}^{(2)}(mnpijk) = \frac{1}{2E}\int_{V}\left\{\left[(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)})\frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + (\sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{33}^{(k)})\frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + (\sigma_{33}^{(k)} + \sigma_{11}^{(k)})\frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right] - \right.$$

$$\left. - 2\left[\sigma_{12}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{23}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{23}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{31}^{(k)}\frac{\partial \sigma_{31}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right]\right\} dV,$$

$$L_{\beta}^{(1)}(ijk) = -\frac{1}{2E}\int_{V}\left\{2\left[\sigma_{11}^{(o)}\frac{\partial \sigma_{11}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{22}^{(o)}\frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{33}^{(o)}\frac{\partial \sigma_{33}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right] + \right.$$

$$\left. + 4\left[\sigma_{12}^{(o)}\frac{\partial \sigma_{12}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{23}^{(o)}\frac{\partial \sigma_{23}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{31}^{(o)}\frac{\partial \sigma_{31}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right]\right\} dV,$$

$$L_{\beta}^{(2)}(ijk) = -\frac{1}{2E}\int_V \left\{\left[(\sigma_{11}^{(o)} + \sigma_{22}^{(o)})\frac{\partial\sigma_{33}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + (\sigma_{22}^{(o)} + \sigma_{33}^{(o)})\frac{\partial\sigma_{11}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + (\sigma_{33}^{(o)} + \sigma_{11}^{(o)})\frac{\partial\sigma_{22}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right] - \right.$$

$$\left. -2\left[\sigma_{12}^{(o)}\frac{\partial\sigma_{12}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{23}^{(o)}\frac{\partial\sigma_{23}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \sigma_{31}^{(o)}\frac{\partial\sigma_{31}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right]\right\}dV,$$

$$L_{\beta}^{(3)}(ijk) = -\frac{1}{2E}\int_V 2E\alpha T\left(\frac{\partial\sigma_{11}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}} + \frac{\partial\sigma_{33}^{(k)}}{\partial D_{mnp}^{(l)}}\right)dV.$$

Решая последние, определим неизвестные $D_{mnp}^{(l)}$ (соответственно для формы представления(14) - A_{mnp} , для формы представления(15) - A_{mnp} , B_{mnp} , и для формы представления(16) - A_{mnp} , B_{mnp} , C_{mnp}) для каждого приближения m, n, p и вставляя их соответственно в (10) с учетом конкретного распределения нагрузки на поверхностях определим компоненты искомого тензора напряжений.

3. Описание алгоритма распараллеливания вычислений и её реализация

Алгоритм распараллеливания вычислений в задачах теории упругости можно осуществить с учетом выбора форм решений в (14) – (16) на этапе постановки задачи и при непосредственном решении системы (20).

Рассмотрим алгоритм распараллеливания на уровне постановки задачи. В этом случае алгоритм распараллеливания осуществляется следующем образом:

1. Ввод исходных данных.
2. Выбор форм решений.
3. Выбор количество процессоров соответствующих форм решений.
4. Передача модулей комплекса программ в клиентские процессоры.
5. Активизация комплекса программ в каждом процессоре.
6. Расчет задачи для каждого форм решений одновременно в каждом процессоре.
7. Проверка достижения точности результатов, если нет, то увеличении приближений и переход к пункту 6.
8. Передача результатов расчета в центральный процессор (сервер).
9. Анализ результатов напряженно-деформированного состояния на основе выбранных форм решений и вывод заключений
10. Конец алгоритма

Приведенный алгоритм реализован в виде комплекса программ в среде программирования Borland C++ 6.0 на основе технологии клиент-сервер. В качестве вычислительного кластера на основе ЛВС были использованы однородные так и неоднородные узлы. Создана сеть на основе клиентских компьютеров: Pentium I/200MHz/32MB/20Gb, Pentium III/700Mhz/128Mb/20Gb и Pentium III/1Gb/128Mb/20Gb, а в качестве центральной машины был выбран компьютер Pentium IV/2.4 Ghz/512Mb/80Gb.

Литература

1.Абдукодиров А.А. Комплекс программ расчета пространственных элементоа конструкций методом напряжений//Алгоритмы. Вып.50. –Ташкент: Изд-во РИСО АН РУз. 1983. – С.36-45.

2.Абдукодиров А.А., Цой А.Д. Моделирование упруго-пластического состояния неравномерного нагретого куба//Узб.журнал Проблемы механики.1999, №4-5.-Ташкент: ФАН. – С.50-54.

3.Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. –М.: Мир, 1975. -544с.

4.Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. – М.: Мир,1984. – 494с.

5.Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2002. – 608с.

6. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости/4-е изд. – М.: Физматгиз,1959. -364с.

7. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Расчет пространственных элементов конструкций

8. Сайфуллин Э.Г., Файзуллина М.А. К анализу форм решений основных уравнений теории упругости//Актуальные проблемы механики оболочек/Сб. научн. Трудов памяти А.В.Саченкова. – Казань, 1998. – С.189-193.

9.Блох В.И. Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьков.гос.ун-та.,1964. -483с.

10.Мальцев Л.Е. О некоторых свойствах координатных систем//Труды Тьюменского индустриального института. -1974.-Вып.40. –С.138-141.

11. Бондаренко Б.А., Филатов А.Н. Квазиполиномиальные функции и их приложения к задачам теории упругости.-Ташкент:ФАН, 1978. – 176с.