

Параллельная реализация метода численного моделирования волновых полей в трехмерных моделях неоднородных сред

Д.А. Караваев

Работа посвящена численному моделированию распространения упругих волн в трехмерных моделях неоднородных сред, характерных для грязевулканических структур. В работе излагается постановка и метод решения поставленной задачи. Численное моделирование проводится на основе конечноразностного метода с применением метода поглощающих границ. Предлагаются способы распараллеливания программы для численных расчетов, средствами языков параллельного программирования MPI и OpenMP. Описанный построитель трехмерной модели упругой среды позволяет конструировать среды близкие к реальным объектам исследований. В работе представлены результаты численного моделирования в виде сейсмотрасс и мгновенных снимков волнового поля.

1. Введение

В настоящее время актуальной проблемой является задача генезиса грязевых вулканов, поскольку у исследователей грязевулканических образований нет единого мнения о происхождении этих вулканов. Грязевые вулканы Керчинско-Таманской области заслуживают внимательного научного изучения, так как их корни уходят на глубины до 8-10 км и дают интереснейшую научную информацию для геологов. Нужно отметить, что некоторые грязевые вулканы в Таманской грязевулканической провинции находятся в непосредственной близости от населенных пунктов и представляют реальную опасность для населения в моменты интенсивных извержений. Поэтому создание адекватных моделей происходящих в вулканах этого типа процессов является важной и актуальной задачей.

В работах [1-4] предлагается вибросейсмический метод мониторинга магматических структур, использующий контролируемый сейсмический источник. Организация вибросейсмического мониторинга этих структур позволит получить новые знания о строении вулканов, их происхождении и о динамике поведения дилатантных структур живущих вулканов.

Результаты первых вибросейсмических экспериментов исследования грязевого вулкана Шуго [1] показали, что волновое поле имеет сложное строение и для интерпретации полученной информации и проведения новых полевых экспериментов целесообразно провести математическое моделирование. Проведение численных экспериментов по распространению упругих волн в трехмерных моделях сред «близких» к исследуемому объекту позволит выбрать приемлемую расстановку системы возбуждения и регистрации при проведении полевого эксперимента, а также поможет при интерпретации сейсмической информации. В этой связи при проведении вибросейсмических зондирований грязевых вулканов Таманской грязевулканической провинции предполагается использовать результаты численного моделирования.

В настоящее время имеется широкий спектр численных методов применяемых для моделирования полных волновых полей в неоднородных упругих средах [5]. Из всех известных методов численного моделирования распространения упругих волн наиболее гибкими, в случае сложно построенных 3-х мерно неоднородных упругих сред, являются разностный метод и метод конечных элементов, но их использование требует больших вычислительных затрат даже при применении кластерных СуперЭВМ.

Разработанная параллельная программа предназначена для численного моделирования распространения упругих волн в трехмерно неоднородных моделях упругих сред, используя конечно разностный метод.

2. Постановка задачи

Все численное моделирование распространения сейсмических волн в сложно построенных упругих неоднородных средах проводится на основе полной системы уравнений теории упру-

гости с соответствующими начальными и граничными условиями. Данная постановка задачи представлена в терминах вектора скоростей (U, V, W) смещений и тензора напряжений ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$):

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x(t, x, y, z),$$

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y(t, x, y, z),$$

$$\rho \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z(t, x, y, z),$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right).$$

с начальными условиями:

$$U(x, y, z, t) |_{t=0} = 0,$$

$$V(x, y, z, t) |_{t=0} = 0,$$

$$W(x, y, z, t) |_{t=0} = 0,$$

и граничными условиями:

$$\sigma_{xz} |_{z=0} = 0,$$

$$\sigma_{yz} |_{z=0} = 0,$$

$$\sigma_{zz} |_{z=0} = 0.$$

Предполагается, что плотность ρ зависит трех пространственных переменных и правая часть может быть представлена в виде:

$$\vec{F}(t, x, y, z) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}.$$

Например, для источника типа “вертикальная сила” получим следующее представление:

$$\vec{F}(t, x, y, z) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) f(t) \vec{k}, \text{ где } (x_0, y_0, z_0) \text{ координаты источника.}$$

3. Метод решения задачи

Метод решения поставленной задачи основан на использование конечноразностного метода. Алгоритм построения конечноразностной схемы предложен в статье [6]. Расчет сеточных

коэффициентов $(\lambda, \lambda + 2\mu, \mu, \rho)$, которые могут иметь разрывы) участвующих в разностной схеме проводится на основе интегральных законов сохранения [6].

Для этого обращается матрица Гука. По формулам, приведенным в работе [6], происходит пересчет новых значений (аппроксимирующих интегральный закон сохранения), затем матрица снова обращается и получаем матрицу с коэффициентами, которые используются для разрешения схемы.

Конечноразностная схема имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространству [6].

Общий вид конечноразностной схемы следующий:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{ijk} + \rho_{i-1jk}}{2} \frac{u^{n+1}_{i-\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}jk}}{\tau} &= \frac{(\sigma^n_{xxijx} - \sigma^n_{xxi-1jk})}{\Delta x} + \frac{(\sigma^n_{xyi-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}x} - \sigma^n_{xyi-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}x})}{\Delta y} + \\
&\frac{(\sigma^n_{xzi-\frac{1}{2}jx+\frac{1}{2}} - \sigma^n_{xzij-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}})}{\Delta z} + f^n_{xijx}, \\
\frac{\rho_{ijk} + \rho_{ij-1k}}{2} \frac{v^{n+1}_{ij-\frac{1}{2}k} - v^n_{ij-\frac{1}{2}k}}{\tau} &= \frac{(\sigma^n_{xyi+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}x} - \sigma^n_{xyi-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}x})}{\Delta x} + \frac{(\sigma^n_{yyijx} - \sigma^n_{xyij-1x})}{\Delta y} + \\
&\frac{(\sigma^n_{yzi-\frac{1}{2}jx+\frac{1}{2}} - \sigma^n_{yzij-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}})}{\Delta z} + f^n_{yijx}, \\
\frac{\rho_{ijk} + \rho_{ijk-1}}{2} \frac{w^{n+1}_{ijk-\frac{1}{2}} - w^n_{ijk-\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{(\sigma^n_{xzi+\frac{1}{2}jx-\frac{1}{2}} - \sigma^n_{xzi-\frac{1}{2}jx-\frac{1}{2}})}{\Delta x} + \frac{(\sigma^n_{yzi+\frac{1}{2}jx-\frac{1}{2}} - \sigma^n_{yzi-\frac{1}{2}jx-\frac{1}{2}})}{\Delta y} + \\
&\frac{(\sigma^n_{zzijx} - \sigma^n_{zzijx-1})}{\Delta z} + f^n_{zijx}, \\
\frac{\sigma^{n+1}_{xxijk} - \sigma^n_{xxijk}}{\tau} &= (\lambda + 2\mu)_{ijk} \frac{u^n_{i+\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}jk}}{\Delta x} + \lambda_{ijk} \frac{v^n_{ij+\frac{1}{2}k} - v^n_{ij-\frac{1}{2}k}}{\Delta y} + \lambda_{ijk} \frac{w^n_{ijk+\frac{1}{2}} - w^n_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \\
\frac{\sigma^{n+1}_{yyijk} - \sigma^n_{yyijk}}{\tau} &= \lambda_{ijk} \frac{u^n_{i+\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}jk}}{\Delta x} + (\lambda + 2\mu)_{ijk} \frac{v^n_{ij+\frac{1}{2}k} - v^n_{ij-\frac{1}{2}k}}{\Delta y} + \lambda_{ijk} \frac{w^n_{ijk+\frac{1}{2}} - w^n_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \\
\frac{\sigma^{n+1}_{zzijk} - \sigma^n_{zzijk}}{\tau} &= \lambda_{ijk} \frac{u^n_{i+\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}jk}}{\Delta x} + \lambda_{ijk} \frac{v^n_{ij+\frac{1}{2}k} - v^n_{ij-\frac{1}{2}k}}{\Delta y} + (\lambda + 2\mu)_{ijk} \frac{w^n_{ijk+\frac{1}{2}} - w^n_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \\
\frac{\sigma^{n+1}_{xzi-\frac{1}{2}jk-\frac{1}{2}} - \sigma^n_{xzi-\frac{1}{2}jk-\frac{1}{2}}}{\tau} &= c44 \frac{u^n_{i-\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}jk-1}}{\Delta z} + \frac{w^n_{ijk-\frac{1}{2}} - w^n_{i-1jk-\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\
\frac{\sigma^{n+1}_{yzj-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}} - \sigma^n_{yzj-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}}{\tau} &= c55 \frac{v^n_{ij-\frac{1}{2}k} - v^n_{ij-\frac{1}{2}k-1}}{\Delta z} + \frac{w^n_{ijk-\frac{1}{2}} - w^n_{ij-1k-\frac{1}{2}}}{\Delta y}, \\
\frac{\sigma^{n+1}_{xyi-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k} - \sigma^n_{xyi-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k}}{\tau} &= c66 \frac{u^n_{i-\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}j-1k}}{\Delta y} + \frac{v^n_{ij-\frac{1}{2}k} - v^n_{i-1j-\frac{1}{2}k}}{\Delta x}. \tag{1}
\end{aligned}$$

Пример расчета взвешенного коэффициента с66 для расчета σ_{xy} :

$$c66_{i-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k} = \left(\frac{1}{\mu_{ijk}} + \frac{1}{\mu_{i-1jk}} + \frac{1}{\mu_{ij-1k}} + \frac{1}{\mu_{i-1j-1k}} \right)^{-1}.$$

По аналогичным формулам определяются остальные коэффициенты с55 и с44.

Критерий устойчивости данной схемы [6]:

$$\tau \leq \frac{1}{Vp_{\max} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}.$$

Здесь $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - шаги дискретизации по пространственным переменным, τ - шаг дискретизации по времени; Vp_{\max} - максимальная скорость распространения упругих волн.

Общая схема вычислений выглядит следующим образом. Вначале, на первом полушаге по времени определяются компоненты вектора скорости смещения, затем на втором полушаге по времени по формулам находятся нужные компоненты напряжений. Далее насчитываются новые компоненты образов вектора скорости смещения на новом полушаге по времени.

4. Поглощающие границы

В связи с тем, что область расчета ограничена, необходимо использовать поглощающие границы. В полной мере данный подход (Perfectly Matched Layers) изложен в работе [7]. В поглощающей зоне происходит пересчет основных искомым величин по конечноразностным формулам (2), а вне зоны поглощения расчет ведется по формулам (1).

Для описания метода построим конечноразностную схему для дискретизации уравнений в поглощающей зоне. Для простоты изложения приведем некоторые из уравнений конечноразностной схемы, остальные же уравнения получаются аналогичным способом.

Прежде чем перейти непосредственно к уравнениям для расчета поглощающих границ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^x + \sigma_{xx}^y + \sigma_{xx}^z, \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^x + \sigma_{yy}^y + \sigma_{yy}^z, \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^x + \sigma_{zz}^y + \sigma_{zz}^z, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^x + \sigma_{xy}^y, \sigma_{xz} = \sigma_{xz}^x + \sigma_{xz}^z, \sigma_{yz} = \sigma_{yz}^y + \sigma_{yz}^z. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая из искомым величин в поглощающей зоне представляется в виде суммы нескольких компонент, значения которых подлежат определению.

Тогда применяя метод [7], уравнения для расчета в зоне поглощения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{xx}^{x^{n+1}}_{xxijk} - \sigma_{xx}^x_{xxijk}}{\tau} + d^x \frac{\sigma_{xx}^{x^{n+1}}_{xxijk} - \sigma_{xx}^x_{xxijk}}{2} &= (\lambda + 2\mu)_{ijk} \frac{u^n_{i+\frac{1}{2}jk} - u^n_{i-\frac{1}{2}jk}}{\Delta x}, \\ \frac{\sigma_{yy}^{y^{n+1}}_{xxijk} - \sigma_{yy}^y_{xxijk}}{\tau} + d^y \frac{\sigma_{yy}^{y^{n+1}}_{xxijk} - \sigma_{yy}^y_{xxijk}}{2} &= \lambda_{ijk} \frac{v^n_{ij+\frac{1}{2}k} - v^n_{ij-\frac{1}{2}k}}{\Delta y}, \\ \frac{\sigma_{zz}^{z^{n+1}}_{xxijk} - \sigma_{zz}^z_{xxijk}}{\tau} + d^z \frac{\sigma_{zz}^{z^{n+1}}_{xxijk} - \sigma_{zz}^z_{xxijk}}{2} &= \lambda_{ijk} \frac{w^n_{ijk+\frac{1}{2}} - w^n_{ijk-\frac{1}{2}}}{\Delta z}, \end{aligned} \quad (2)$$

В этих уравнениях величины d^x, d^y, d^z есть коэффициенты поглощения вдоль соответствующих направлений пространственных переменных. Определив из уравнений значения компонент $\sigma_{xx}^x, \sigma_{xx}^y, \sigma_{xx}^z$, значение компоненты σ_{xx} получаем суммированием всех найденных компонент $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^x + \sigma_{xx}^y + \sigma_{xx}^z$ для каждой точки конечноразностной схемы в зоне PML. Для оставшихся конечноразностных уравнений проделываются аналогичные действия для получения значений искомым величин в зонах поглощения.

5. Параллельная реализация программы численного моделирования

В данной работе решается трехмерная динамическая задача моделирования распространения упругих волн. Как уже было замечено, эта задача является ресурсоемкой, поэтому логично проводить столь массивные вычисления на современных суперкомпьютерах. Для реализации описанного конечноразностного метода была разработана параллельная программа, способ распараллеливания которой будет изложен далее.

Для создания параллельного варианта программы рассматривалось несколько подходов. Первый подход к распараллеливанию заключается в том, что исходная область расчетов дробится на кубы в количестве равному количеству вычислительных узлов, имеющемуся в распоряжении пользователя. Но в такой ситуации резко возрастает количество обменов информацией между гранями соседних кубов. На наш взгляд наиболее простым способом в реализации параллельной программы оказался способ разбиения области на слои вдоль координаты Oz . В этом случае также количество слоев определяется количеством свободных вычислительных узлов. Нужно отметить, что при таком подходе уменьшается количество обменов информацией, для MPI версии параллельной программы. На основе этого метода уже создана рабочая программа, где для распараллеливания используется OpenMP. Есть и вторая реализация программы, где используется комбинация возможностей MPI и OpenMP. В таком случае, предлагается проводить обмен информацией между соседними слоями через MPI, а внутри каждого слоя проводить параллельные вычисления, используя OpenMP. Сравнение времени работы этих двух параллельных программ не проводилось, хотя это является интересным и необходимым моментом, поскольку вторая программа, где используется “комбинированное” распараллеливание находится еще в стадии доработки.

6. Реализация “построителя” трехмерной модели упругой среды

Прежде чем произвести численный расчет по представленной методике требуется построить трехмерную модель среды. Необходимо отметить, что для этой задачи нет стандартных и универсальных решений. Поэтому для выполнения данной работы был создан свой построитель трехмерных моделей неоднородных упругих сред, характерных для грязевых вулканов. С помощью разработанного построителя определяются коэффициенты $\lambda, \mu, \lambda + 2\mu, \rho$ в каждой точке конечноразностной схемы.

Возможны несколько способов задания трехмерной модели упругой среды.

В самом общем случае предполагается, что трехмерная модель среды (λ, μ, ρ) задана в узлах трехмерной сетки с произвольными шагами по пространственным переменным. В этом случае предполагается, что используется какой-либо внешний построитель модели.

Для выполнения данной работы не было подходящей программы, которая позволила бы создать необходимую модель среды, поэтому был разработан свой “построитель”.

В нашем случае предполагается что задана крупноблочная модель среды составленная из параллелепипедов, в вершинах которых задаются параметры среды (Vp, Vs, ρ) . Эти параметры являются непрерывными внутри каждого блока. Разрывы проходят только по граням соседних параллелепипедов. Далее методом конечных элементов происходит интерполяция параметров среды на более “мелкую” расчетную сетку.

Затем в построенную неоднородную среду можно вставлять различные геометрические объекты, которые имеют аналитическое описание, (цилиндрические, конические, эллипсоидальные и др. подобласти, или их пересечение) со своими параметрами среды.

Разработанный построитель модели позволяет конструировать довольно сложные модели сред, близкие к реальным объектам исследования.

7. Результаты численного эксперимента

Результаты полевых экспериментов показали, что структура грязевых вулканов имеет сложную геометрию и неоднородное строение среды, в которой содержится жидкость, пузыри

газа, неоднородные включения и т.д. Соответственно все это оказывает влияние на структуру волнового поля наблюдаемого в экспериментах. В данной работе мы проводим численное моделирование, цель которого представить влияние геометрии модели на структуру волнового поля, т. е. не учитываются особенности связанные с учетом присутствия разнородного строения среды с включением различных неоднородностей, хотя программа позволяет проводить расчеты такого вида. В этой связи, на первом этапе, мы рассматриваем простые модели, которые позволяют исследовать основные особенности.

Для исследования структуры волнового поля, получаемой при проведении полевых экспериментов на грязевых вулканах в Керчинско-Таманской области, были проведены тестовые расчеты для различных моделей сред, одна из которых представлена далее.

Модель.

Модель среды состоит из трех горизонтальных слоев (средний слой низкоскоростной, толщина 1км). В верхний слой вложено объединение цилиндрических подобластей с упругими свойствами аналогичными среднему слою. Диаметр цилиндров 0.2км. Параметры вмещающей среды: $V_p=2.0\text{км/с}$, $V_s=1.0\text{км/с}$, $\rho = 1\text{г/см}^3$. Параметры цилиндров и среднего слоя: $V_p=1.0\text{км/с}$, $V_s=0.7\text{км/с}$, $\rho = 1\text{г/см}^3$. На рис.8.5 представлено сечение плоскостью Oxz данной области проходящей через центр источника, и плоскостью Oxy около свободной поверхности. Размер вмещающей среды 7км по всем направлениям.

Система возбуждения.

Источник типа “центр давления”, несущая частота 4Гц близок к свободной поверхности, координаты (3км,3.5км,0.4км).

Система наблюдения.

Вблизи от свободной поверхности расположена линия из 25 сейсмоприемников Расстояние между сейсмоприемниками 0.25км. Схема расположения представлена на Рис.1.

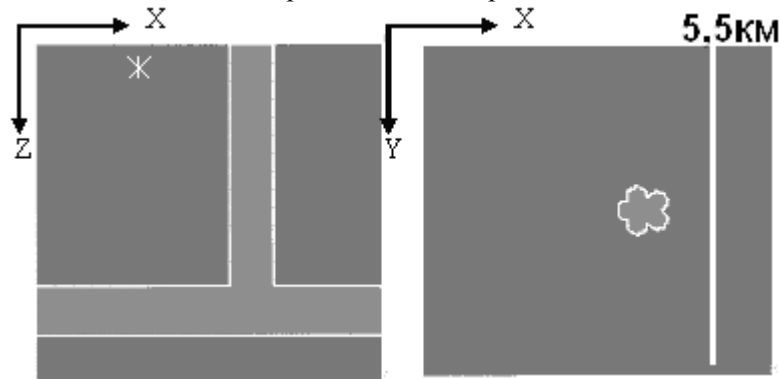


Рис.1 Модель упругой среды

На Рис.2,Рис.3 представлены мгновенные снимки волнового поля в различные промежутки времени для искомым компонент вектора скоростей смещений, сделанные в плоскостях сечения Oxy , Oxz . На рис.4 представлены полученные теоретические сейсмограммы.

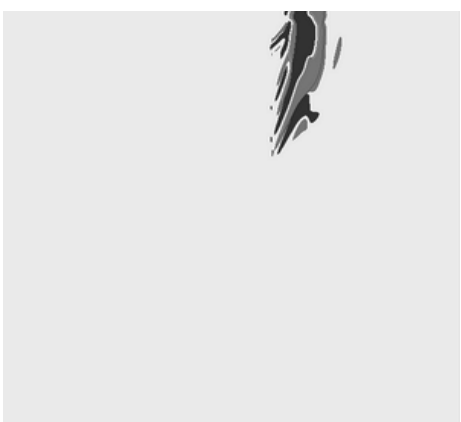


T=1.5сек

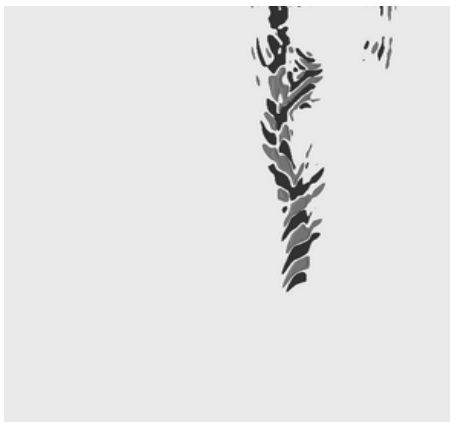


T=2.7сек

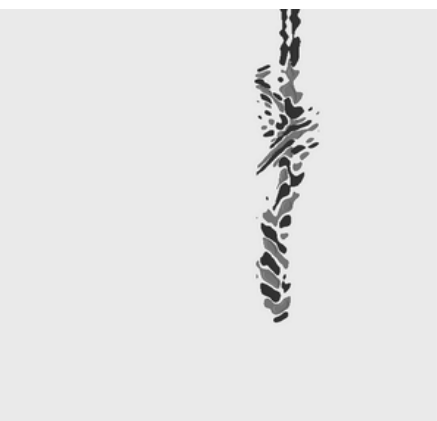
Рис.2 Компонента U плоскость OXZ



T=1.5сек



T=2.7сек



T=4.3сек



T=5.1сек

Рис.3 Компонента V плоскость OXZ

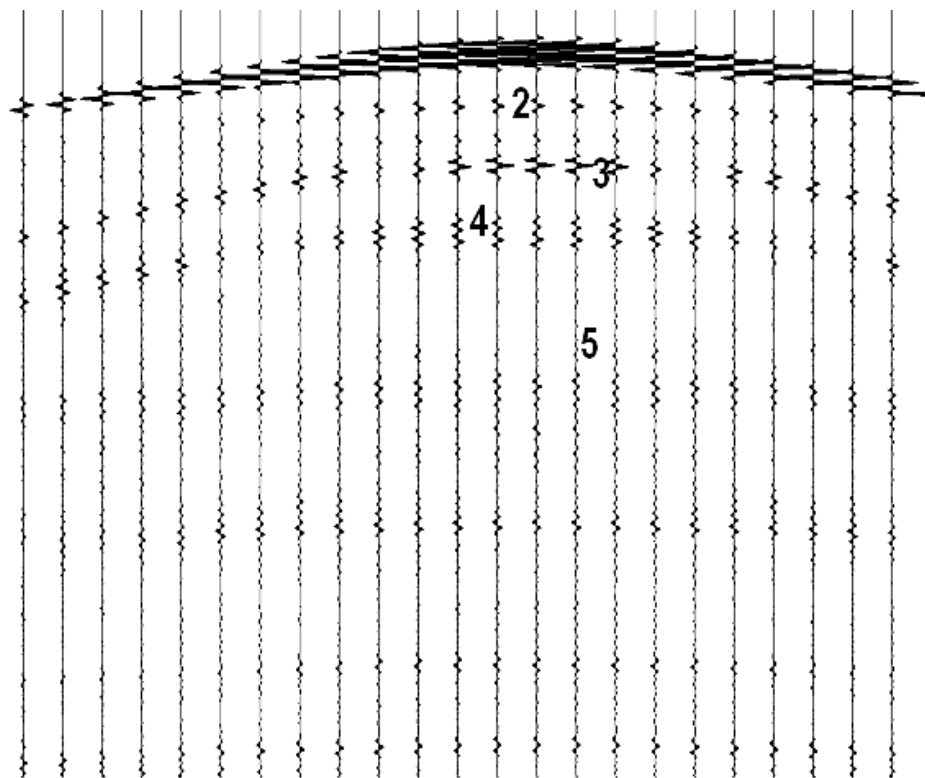


Рис.4 Теоретические сейсмограммы “коса” 3, компонента U

Наблюдая структуру годографа и учитывая время прихода волн, можно сделать вывод, что: 2 – PP волна, 3 – PS волна, 4 – PPP волна, 5 – PPS волна, Для поперечных волн 5, их амплитуда не велика, что обусловлено присутствием на границах “цилиндра” неоднородностей сравнимых с длиной волны S. Это привело к рассеиванию энергии внутри цилиндра.

8. Заключение

Разработан алгоритм и создана параллельная программа для численного моделирования распространения упругих волн в трехмерных моделях неоднородных сред. Разработан построитель модели трехмерной модели упругой среды.

С помощью созданной программы моделирования, проведены расчеты на многопроцессорных вычислительных системах. В дальнейшем предполагается провести серию расчетов для различных моделей сред характерных для строения грязевого вулкана «Гора Карabetова».

Дальнейшие направления исследований связаны с изучением различных методов создания поглощающих границ, а также произвести численные эксперименты для более сложных моделей упругих сред, описывающих гипотетическое строение конкретных грязевых вулканов.

Литература

1. Глинский Б.М., Собисевич А.Л., Хайретдинов М.С. Опыт вибросейсмического зондирования сложно построенных геологических структур (на примере грязевого вулкана Шуго). // Докл. РАН. - 2007. - Т.413, №3. - С.398-402.
2. Глинский Б.М., Фатьянов А.Г. Численно-аналитическое моделирование волновых полей в разномасштабных зонах вулканической деятельности // Всероссийская конференция по вычислительной математике "КВМ-2007", Новосибирск, 18-20 июня 2007.
3. Глинский Б. М. Фатьянов А.Г (2005), Вибросейсмический мониторинг живущих вулканов, Активный геофизический мониторинг вулканов: материалы 2-го межд. Симпозиума 12-16 сент. 2005, Новосибирск, С. 52-57.

4. Глинский Б. М. Фатьянов А.Г (2005), Изучение и мониторинг грязевых вулканов активными сейсмическими методами: материалы 2-го межд. Симпозиума 12-16 сент. 2005, Новосибирск, С. 52-57.
5. Михайленко Б.Г. Сейсмические поля в сложно построенных средах. Новосибирск. 1988. С. 312.
6. M. Bihn, T. Weiland: A Stable Discretization Scheme for the Simulation of Elastic Waves. // Proceedings of the 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics (IMACS 1997), -Vol. 2, -August 01.08.1997, -pp. 75-80.
7. F. Collino, C. Tsogka, Application of the pml absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, Geophysics 66 (1) (2001) 294-307