

Развитие параллельной версии аналитико-численного метода блоков для связанных задач волновой виброакустики

Д.Б. Волков-Богородский, С.А. Харченко

В работе разрабатываются параллельные алгоритмы, реализующие аналитический метод решения краевых задач механики сплошных сред, применительно к связным задачам волновой виброакустики. Основой блочного аналитико-численного метода являются решения, точно удовлетворяющие исходной системе дифференциальных уравнений в подобластях-блоках. Аналитическая структура решений в блоках, которые строятся на основе фундаментальных решений уравнения Гельмгольца, позволяет разрешить сложную структуру общего решения с учетом его аналитических особенностей и с высокой степенью точности. При этом возникает задача формирования и решения блочной системы линейных уравнений, требующая больших вычислительных ресурсов. Матрица системы комплексная, блочно-разреженная, с плотными блоками. Параллельные вычисления эффективно используются при формировании и решении блочной системы уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов для модельных задач волновой виброакустики.

1. Введение

В настоящей работе развиваются высокоточные аналитические методы решения краевых задач механики сплошных сред, основанные на специальных разложениях по фундаментальным системам функций, удовлетворяющим уравнению Гельмгольца. Эти методы обобщают на многоблочные структуры хорошо известный метод наименьших квадратов [1], который, к сожалению, является эффективным только для областей простой геометрии, и тем самым существенно расширяют область применимости этого метода.

Для задач теории упругости и акустики многоблочный вариант метода наименьших квадратов был предложен в работе [2], и получил дальнейшее развитие в [3,4]. Он основан на представлении решения в каждом блоке в виде обобщенных рядов Тейлора по специальной системе функций, точно удовлетворяющей пространственному уравнению Лапласа или Гельмгольца и обладающей хорошими аппроксимативными свойствами. Построение таких систем функций является центральным моментом в методе и осуществляется при помощи процедуры квазиразделения переменных [4]. Метод позволяет получать решение с высокой степенью точности и в аналитическом виде, однако требует больших вычислительных затрат. Поэтому актуальной задачей является разработка и дальнейшее развитие параллельной версии блочного метода [5]. Внешне метод напоминает метод конечных элементов, но имеет принципиальные отличия; например, он вычисляет поле напряжений и поле скоростей не в отдельных точках интегрирования, а во всей подобласти, являющейся элементом блочной структуры, и позволяет контролировать точность получаемого решения.

В работе развиваются параллельные алгоритмы блочного метода для решения связанных задач виброакустики [3,4], рассматриваемых не во временном, а в частотном диапазоне изменения переменной, в которых расчетная область состоит из акустической и механической фазы, взаимодействующих друг с другом; эти задачи находят практическое применение для оценки уровня шума в помещении с перегородкой.

2. Аналитическая основа метода

Для описания поля перемещений, поля скоростей и поля давлений в каждой из фаз расчетной области используются комплексные потенциалы $\Phi = \Phi(w, \bar{w}, z)$, удовлетворяющие осцилляционному уравнению Гельмгольца с вещественным коэффициентом κ :

$$\nabla^2 \Phi + \kappa^2 \Phi = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w \partial \bar{w}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \kappa^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

где комплексные переменные $w = x + iy$, $\bar{w} = x - iy$, а точка P в пространстве имеет декартовы координаты (x, y, z) .

В акустической фазе функция $\Phi(P)$ описывает комплексный потенциал давления, через который акустическое давление и скорость колебаний при заданной круговой частоте колебаний $\omega = 2\pi f$ определяются по формулам

$$p(P, t) = \text{Re} \left[\Phi(P) e^{i\omega t} \right], \quad \vec{V}(P, t) = \text{Re} \left[\frac{i}{\omega \rho} \nabla \Phi(P) e^{i\omega t} \right], \quad (2)$$

где ρ представляет собой плотность акустической среды; коэффициент в уравнении (1) $\kappa = \omega/C$ (волновое число), C – скорость звука.

В механической фазе точное описание перемещений осуществляется через два векторных потенциала, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (обобщенное представление Папковича-Нейбера [3]):

$$\bar{u}(P) = \frac{\vec{f}(P)}{\mu} - \frac{\nabla \text{div} [\vec{f}^*(P) - \vec{f}(P)]}{\rho_b \omega^2}, \quad \nabla^2 \vec{f} + \frac{\rho_b \omega^2}{\mu} \vec{f} = 0, \quad \nabla^2 \vec{f}^* + \frac{\rho_b \omega^2}{k} \vec{f}^* = 0, \quad (3)$$

где ρ_b – плотность механической среды, $k = 2\mu + \lambda$, μ , λ – коэффициенты Ламе. Напряжения в вибрирующем теле находятся по обычным формулам через тензор деформаций, а скорость вибраций по формуле

$$\vec{v}(P, t) = \text{Re} \left[i \omega \bar{u}(P) e^{i\omega t} \right]. \quad (4)$$

На границе между упругой и акустической областью ставится условие непрерывности нормальной составляющей скорости и давления; если упругая область отсутствует, то на границе области задается условие поглощения с заданным импедансом Z_n (см. [2-5]).

Сшивка локальных решений в блоках осуществляется при помощи блочного варианта метода наименьших квадратов (см. [2-4]), или при помощи модифицированного функционала метода наименьших квадратов с энергетическими слагаемыми, выполняющими роль регуляризатора Тихонова для вырожденного функционала наименьших квадратов [4-6].

Одновременная минимизация всей системы функционалов реализуется в виде несимметричной (или симметричной для модифицированного функционала) блочной системы уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов в разложениях вспомогательных потенциалов по фундаментальной системе решений уравнения Гельмгольца, и позволяет определить все локальные потенциалы решения Φ_k , \vec{f}_k , \vec{f}_k^* .

Минимизация системы функционалов блочного варианта метода наименьших квадратов приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов в разложениях потенциалов, имеющую естественную блочную структуру:

$$(T_k + \varepsilon B_k) \vec{X}_k + \sum_l T_{kl} \vec{X}_l = \vec{H}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (5)$$

здесь T_k – комплексная матрица Грама аппроксимирующей системы функций, B_k – матрица жесткости для функционала энергии, ε – параметр регуляризатора Тихонова, \vec{X}_k – неизвестные коэффициенты в разложении потенциалов в блоке V_k , T_{kl} – матрицы, обеспечивающие сшивку локальных решений между блоками V_k , V_l и состоящие из скалярных произведений аппроксимирующих функций этих блоков, \vec{H}_k – вектор граничных условий в блоке, N – общее число блоков. Размер каждого блока M_k совпадает с числом неизвестных коэффициентов в локальном представлении решения.

Разбиение расчетной области на более простые односвязные подобласти-блоки, $\bar{G} = \bigcup \bar{B}_k$, $V_k \cap V_l = \emptyset$, $k \neq l$, т.е. введение блочной структуры осуществляется при помощи конечно-элементной сетки, которая может быть достаточно грубой. Такое разбиение на тетраэдры или гексаэдры легко может быть получено при помощи известных конечно-элементных препроцессоров (FEMAP/NASTRAN, ABAQUS CAE и т.д.).

3. Особенности параллельной реализации

Основной операцией при формировании блочной системы (5) является вычисление скалярных произведений моментных характеристик аппроксимирующей системы функций (скорость, тензор напряжений), они вычисляются через производные до второго порядка. Здесь содержится значительный ресурс параллелизма, поскольку формирование блочной системы производится с помощью коллокационного вектора, составленного из значений аппроксимирующей системы функций в одной точке. Поэтому операции полностью независимы на уровне разных блоков и даже на уровне разных узлов в квадратуре Гаусса. Вычисление же моментных характеристик для коллокационного вектора сводится к трехчленным рекуррентным преобразованиям на основе особых дифференциальных свойств используемой системы функций (см. [2,4]).

Основная специфика системы линейных уравнений (5) состоит в следующем:

- 1) аппроксимация строится на относительно небольшом числе элементов;
- 2) качество аппроксимации достигается, прежде всего, за счет увеличения числа базисных функций в блоке.

С точки зрения линейной алгебры матрица системы уравнений является комплексной плотно блочно разреженной матрицей, с относительно небольшим числом блоков и относительно большим размером каждого блока. Кроме того, в силу специфики построения системы среди диагональных блоков матрицы системы встречаются плохо обусловленные.

Распределение вычислительной работы по процессорам осуществляется и на этапе генерации, и на этапе решения систем линейных уравнений на основе анализа графа блочной разреженности матрицы по блочным строкам/столбцам матрицы исходной системы уравнений. Граф блочной разреженности матрицы содержит информацию о геометрических связях между блоками расчетной сетки. Области, в которых решается задача, как правило, существенно трехмерные, а значит, декомпозиция задачи должна существенным образом учитывать эту трехмерность. В данной работе мы следуем технике декомпозиции задачи решения системы уравнений на основе упорядочивания типа вложенных сечений ND (Nested Dissection) [7] с учетом декомпозиции поверхностных межпроцессорных границ. Эта техника подробно описана в работе [8]. Упорядоченная блочная структура матрицы для некоторой тестовой задачи имеет вид в построенном крупно-блочном биении, показанный на рис. 1а, а результирующая крупно-блочная структура матрицы в терминах крупно-блочного биения для параллельных вычислений показана на рис. 1б.

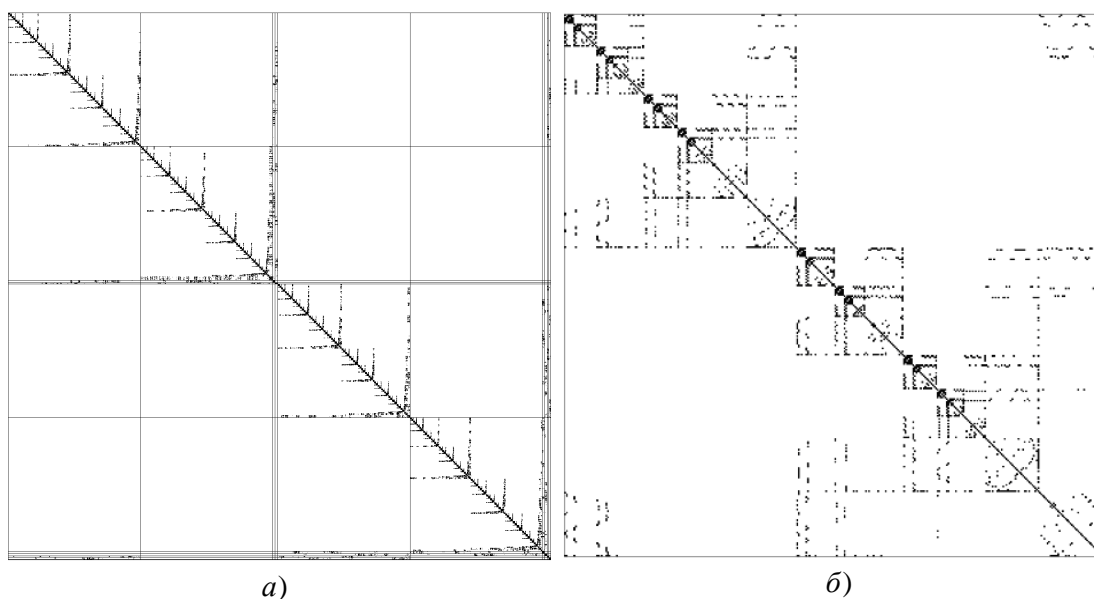


Рис. 1. Структура разреженности матрицы: а) при блочном биении, б) при крупно-блочном биении

Блочная система уравнений решается масштабированным блочно-предобусловленным алгоритмом GMRES, в котором в качестве переобуславливания использовалось блочное неполное LU разложение второго порядка точности. Предварительно, перед вычислением неполного разложения матрицы, проводится блочно-диагональное масштабирование системы уравнений, в результате которого диагональные блоки коэффициентов становятся единичными матрицами.

Неполное блочное разложение для системы уравнений строится на основе соотношения

$$A + E = L * U + L * R + W * U, \quad (6)$$

где блочно-треугольные матрицы L и U содержат блочные элементы разложения “первого порядка” точности, а блочно-треугольные матрицы W и R содержат блочные элементы “второго порядка” точности; E – некоторая матрица ошибки. Это разложение строится как несимметричное блочное обобщение алгоритма из работы [9].

Итерации по решению системы уравнений проводятся с использованием переобусловленного варианта алгоритма GMRES [10]. Алгоритм GMRES основан на следующих матричных соотношениях:

$$b = P_1 g_1, \quad (7)$$

$$A * (LU)^{-1} * P_k = P_{k+1} * H_k, \quad (8)$$

где H_k – верхняя хессенбергова форма с размером $(k+1) \times k$, b – вектор правой части, P_k – матрица с ортонормированными столбцами размера $N \times k$. Для построения матричных соотношений (7) и (8) требуется на каждой итерации алгоритма: умножение на матрицу A , решение систем уравнений с треугольными матрицами L и U , а также ортогонализация. Для обеспечения численной устойчивости вычислений ортогонализации осуществляются неявным образом на основе преобразований Хаусхолдера. Новое приближение к решению системы линейных уравнений строится по формуле $x_k = (LU)^{-1} * P_k * y_k$, где y_k есть решение задачи минимизации $\|H_k y_k - e_1 g_1\| = \min$.

Следует отметить, что крупно-блочная структура разреженности матрицы, показанная для тестовой задачи на рис. 1б, демонстрирует также все основные зависимости между собой крупно-блочных вычислений в описанном выше алгоритме решения системы уравнений. Это утверждение имеет место при условии, что неполное разложение строится в крупно-блочном смысле “по позициям”, т.е. все данные каждой крупно-блочной строки, столбца матрицы, блочной строки U , блочного столбца L и соответствующей части векторных данных правой части и приближения к решению, а также данные ортогонализации отдаются одному и тому же процессору.

4. Теоретическое обоснование метода

С каждым блоком V_k в блочной структуре разбиения расчетной области связывается норма наименьших квадратов, соответствующая скалярному произведению в интегральной норме по границе области в классе функций, аналитически точно удовлетворяющих оператору задачи:

$$F_k(\Phi_k, \Phi_l) = \left\| \alpha_k \Phi_k + \beta_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \right\|_{S_k}^2 + \sum_l \left\| \alpha_{kl} (\Phi_k - \Phi_l) + \beta_{kl} \frac{\partial (\Phi_k - \Phi_l)}{\partial n} \right\|_{S_{kl}}^2, \quad (9)$$

где $S_{kl} = \partial V_k \cap \partial V_l$ – общая часть границы для соседних блоков, $S_k = \partial V_k \cap \partial G$ – общая часть границы блока и границы области G (кривизна границы исходной области учитывается точно).

Для рассматриваемых задач расчетная область разбивается на блоки двух типов, соответствующих акустической и механической фазе области; в механической фазе соответствующая норма имеет следующий вид:

$$F_k(\bar{u}_k, \bar{u}_l) = \left\| \alpha_k \bar{u}_k + \beta_k \bar{p}_k \right\|_{S_k}^2 + \sum_l \left\| \alpha_{kl} (\bar{u}_k - \bar{u}_l) + \beta_{kl} \frac{\partial (\bar{u}_k - \bar{u}_l)}{\partial n} \right\|_{S_{kl}}^2, \quad (10)$$

где \vec{p}_k обозначает вектор поверхностных сил для подобласти B_k . Норма (9), (10) соответствует скалярному произведению в пространстве комплексных функций. На границе S_{kl} между блоками, относящимися к разным фазам расчетной области соответствующее слагаемое в (9) или (10) обеспечивает сшивку скоростей, давлений и перемещений при условии равенства нулю касательных сил в механической фазе:

$$F_k(\Phi_k, \Phi_l, \vec{u}_l) = F_k(\Phi_k, \Phi_l) + \left\| \frac{1}{\omega \rho} \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} - \omega \vec{u}_l \vec{n} \right\|_{S_{kl}}^2,$$

$$F_k(\vec{u}_k, \vec{u}_l, \Phi_l) = F_k(\vec{u}_k, \vec{u}_l) + \|\vec{p}_k \vec{n} - \Phi_l\|_{S_{kl}}^2 + \|\vec{p}_k - \vec{p}_k \vec{n}\|_{S_{kl}}^2.$$

Коэффициенты α_{kl} , β_{kl} , α_k , β_k должны обеспечивать невырожденность нормы в блоке при условии равенства нулю функций из соседних блоков, $\Phi_l = 0$, $\vec{u}_l = 0$, а также сшивку функций и нормальных производных на границах между блоками, это, в частности, означает невырожденность матрицы сшивочных коэффициентов:

$$F_k(\Phi_k, 0) = 0 \Leftrightarrow \Phi_k \equiv 0, \quad F_k(\vec{u}_k, 0) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}_k \equiv 0, \quad P \in B_k, \quad (11)$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{kl} & \beta_{kl} \\ \alpha_{lk} & \beta_{lk} \end{pmatrix} \neq 0, \quad P \in S_{kl}. \quad (12)$$

Для области в целом водится норма наименьших квадратов на многоблочной структуре по следующей формуле:

$$F(\Phi, \vec{u}) = \max_k F_k, \quad \Phi = \Phi_k, \quad \vec{u} = \vec{u}_k, \quad P \in B_k;$$

это действительно норма, т.к. из сформулированных условий следует, что для $F(\Phi, \vec{u}) = 0$ необходимо и достаточно $\Phi = 0$, $\vec{u} = 0$. Аппроксимация решения в целом обеспечивается сходимостью к точному решению по норме на многоблочной структуре: $F(\Phi - \Phi_0, \vec{u} - \vec{u}_0) \rightarrow 0$, где Φ_0 , \vec{u}_0 – точное решение задачи. Аппроксимация обеспечивается разложением комплексных потенциалов Φ_k , \vec{f}_k , \vec{f}_k^* по фундаментальной системе уравнения Гельмгольца степенного или экспоненциального типа [2,4]. Эти системы обладают свойством полноты и хорошими аппроксимативными свойствами; в частности, они образуют базис обобщенного ряда Тейлора для уравнения Гельмгольца.

Достижение необходимой точности аппроксимации обеспечивается с помощью минимизации нормы $F(\Phi - \Phi_0, \vec{u} - \vec{u}_0)$ на заданном наборе функций в разложении вспомогательных потенциалов; одновременная минимизация функционалов F_k (составляющих норму) на своем наборе функций дает алгоритм для оценки сверху абсолютного минимума нормы $F(\Phi - \Phi_0, \vec{u} - \vec{u}_0)$ и сводится к решению блочной системы уравнений (5) (при $\varepsilon = 0$). Значение функционала в экстремальной точке равняется сумме следующих скалярных произведений (в акустической фазе, аналогично в механической фазе):

$$\min_{\Phi_k} F_k = \left(\alpha_k \overline{\Phi_0} + \beta_k \frac{\partial \overline{\Phi_0}}{\partial n}, \alpha_k (\Phi_0 - \Phi_k) + \beta_k \frac{\partial (\Phi_0 - \Phi_k)}{\partial n} \right)_{S_k} +$$

$$+ \sum_l \left(\alpha_{kl} \overline{\Phi_l} + \beta_{kl} \frac{\partial \overline{\Phi_l}}{\partial n}, \alpha_{kl} (\Phi_l - \Phi_k) + \beta_{kl} \frac{\partial (\Phi_l - \Phi_k)}{\partial n} \right)_{S_{kl}}, \quad (13)$$

где черта над функцией означает ее комплексное сопряжение. Из формулы (13) следует сходимость к решению по норме при условии аппроксимации в блоке, а это является следствием полноты фундаментальной системы функций.

Второй подход к аппроксимации решения связан с введением полунормы $F(\Phi, \vec{u})$ (в которой слагаемые, обеспечивающие сшивку производных, отсутствуют), а также регуляризатора Тихонова $E(\Phi, \vec{u})$ (в виде функционала энергии, вычисляемого по границе блока [4,6]):

$$F(\Phi, \vec{u}) = \max_k F_k, \quad E(\Phi, \vec{u}) = \{E_k(\Phi_k), E_k(\vec{u}_k)\}, \quad P \in B_k;$$

$$F_k(\Phi_k, \Phi_l) = \|\Phi_k\|_{S_k}^2 + \sum_l \|\Phi_k - \Phi_l\|_{S_{kl}}^2, \quad F_k(\vec{u}_k, \vec{u}_l) = \|\vec{u}_k\|_{S_k}^2 + \sum_l \|\vec{u}_k - \vec{u}_l\|_{S_{kl}}^2,$$

$$E_k(\Phi_k) = \int_{\partial B_k} \overline{\Phi_k} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} + \alpha \Phi_k - h_1 \right) dP', \quad E_k(\vec{u}_k) = \int_{\partial B_k} \overline{\vec{u}_k} (\vec{p}_k - \vec{h}_2) dP';$$

здесь h_1, \vec{h}_2 означают заданную скорость звуковой волны или заданные силы на границе области (примыкающей к границе блока), $\alpha = i\omega\rho/Z_n$ – нормированный аттмиданс звуковой волны на границе, S_k – та часть границы блока и границы области G , на которой задано краевое условие первого рода. При этом подходе минимизируется функционал с регуляризатором, $F(\Phi - \Phi_0, \vec{u} - \vec{u}_0) + \varepsilon E(\Phi, \vec{u}) = \min$, обеспечивающий при достаточно малом ε одновременную сшивку функций и минимизацию функционала энергии, что приводит к блочной системе уравнений (5).

5 Численные свойства метода на модельных задачах

Рассматривается несколько модельных задач, демонстрирующих работу блочного метода; дается сравнение с аналитическим решением (верификация метода), а также на примере расчета акустического поля в салоне автомобиля демонстрируются вычислительные свойства параллельного алгоритма, в частности строятся диаграммы масштабируемости для разных блочных структур.

На рис. 2 приведена модель прямоугольного акустического канала с закругленным излучателем (рассматривается $1/4$ часть области); геометрические размеры $A = 0.6 \text{ м}$, $B = 0.5 \text{ м}$, $L = 2.5 \text{ м}$; размеры квадратного излучателя, вибрирующего с заданной скоростью $V = 1 \text{ м/сек}$: $a = b = 0.25 \text{ м}$, $r = 0.08 \text{ м}$; противоположный конец канала полностью поглощает звук, остальные стенки целиком отражают. Аналитическое решение этой задачи было получено в виде ряда Фурье при $r = 0$, с ним и сравнивалось численное решение, см. рис. 3.

Разбиение осуществлялось на криволинейные блоки-гексаэдры с характерным размером $h = C/(2f)$ (два элемента на длину волны), сравнивалось давление P в шкале децибел в точке $(0.5, 0.4, 1.7)$. В диапазоне частот $f \in (1000, 1500)$ число блоков $N = 460$, при $f \in (1500, 2000)$ число блоков $N = 1218$. расчеты проводились на аппроксимирующей системе функций степенного типа [2] с максимальной степенью $M = 6$. Наблюдается практически полное совпадение аналитического решения (тонкая линия) и численного (сплошная толстая линия); незначительное расхождение наблюдается в конце расчетных диапазонов. Пример демонстрирует возможность качественной аппроксимации на относительно небольшом числе блоков.

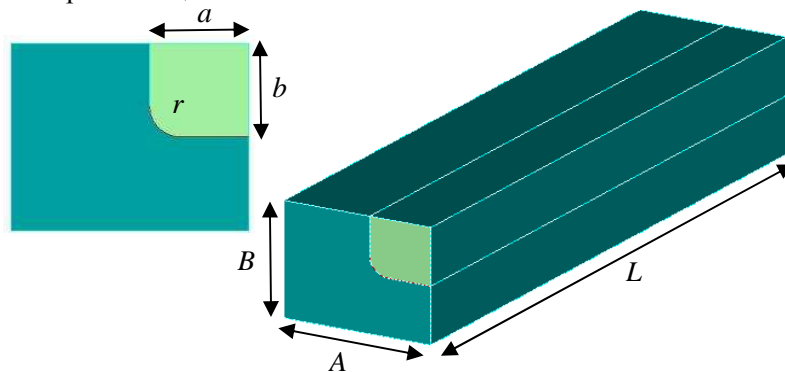


Рис. 2. Модель прямоугольного канала с закругленным излучателем

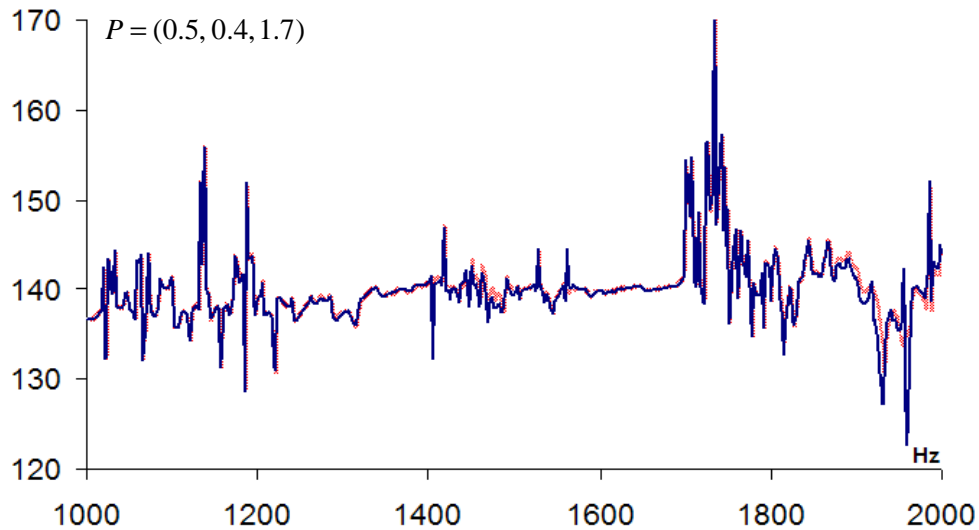


Рис. 3. Сравнение с аналитическим решением

Другой пример связан с расчетом акустического поля в салоне автомобиля, модель которого ($\frac{1}{2}$ симметричная часть) представлена на рис. 4; характерный размер салона: $A=1\text{ м}$, $B=1.83\text{ м}$, $L=3\text{ м}$. Передняя панель излучает звук со скоростью $V_n=0.001\text{ м/сек}$, остальные элементы интерьера поглощают звук с разным коэффициентом поглощения $q=0.1\div 1.0$ (для кресел поглощение полное, $q=1$). На рис. 5 представлено давление в среднем сечении (в шкале паскалей и децибел), посчитанное при $f=1500\text{ Hz}$.

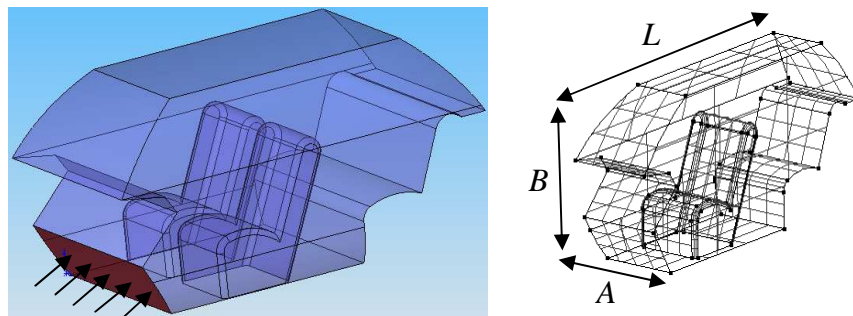


Рис. 4. Модель салона автомобиля

Расчеты проводились на блоках-тетраэдрах, разбиение на которые может быть получено любым конечно-элементным препроцессором. Здесь, наоборот, точность достигалась на относительно большом числе блоков при небольшой степени аппроксимации $M=2$; эта ситуация является более выгодной для текущего состояния параллельного решателя блочной системы уравнений. К тому же при блочной биении на тетраэдры более равномерно загружаются процессоры. На рис. 6 даны диаграммы распределение блоков по процессорам при увеличении их количества, общее число блоков равно $N=43339$ тетраэдров.

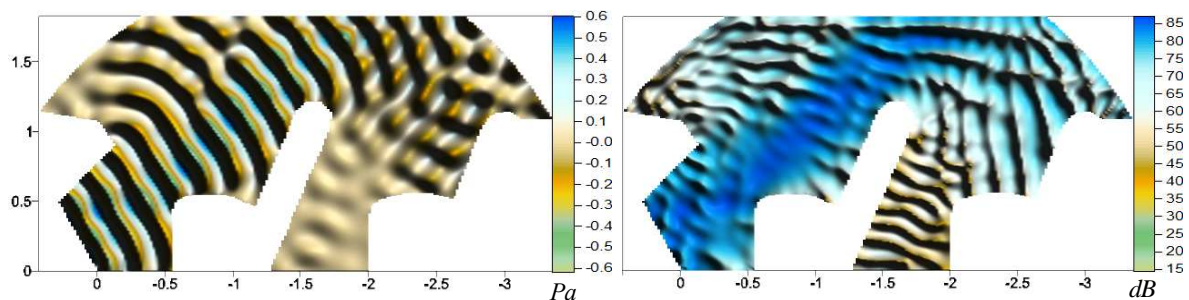


Рис. 5. Давление в шкале паскалей и децибел в среднем сечении

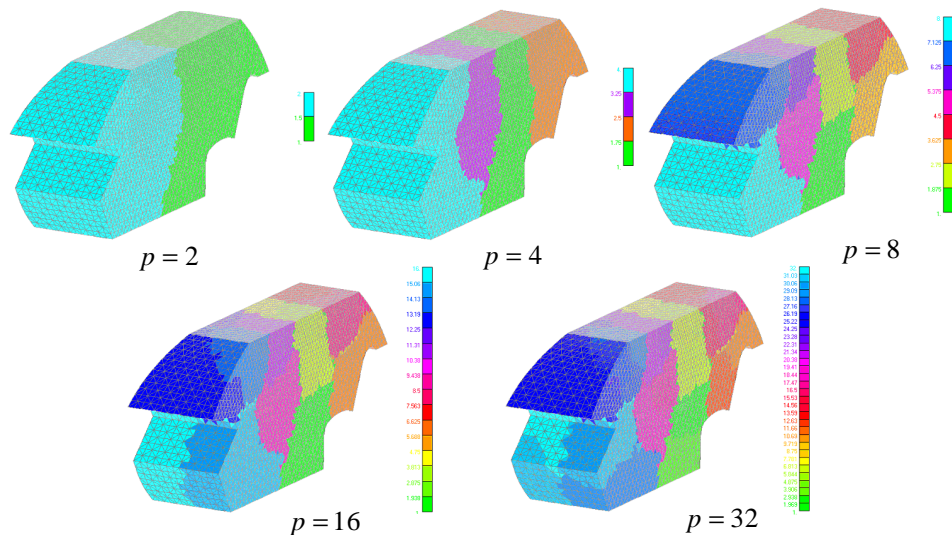


Рис. 6. Распределение блоков по процессорам ($p = 2, 4, 8, 16, 32$)

Из рис. 6 видно, что ресурс параллелизма не исчерпан на 32 процессорах, это же подтверждают и кривые масштабируемости (ускорения). На рис. 7 представлены кривые ускорения при разных подходах к аппроксимации: небольшое число блоков и большая степень аппроксимации, большое число блоков и небольшая степень аппроксимации, разбиение области на гексаэдры (модель рис. 2), разбиение области на тетраэдры (модель рис. 4).

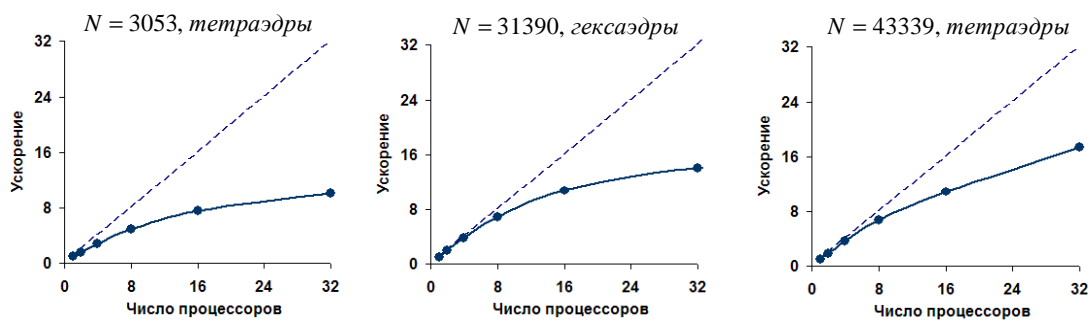


Рис. 7. Ускорение параллельного алгоритма

Из анализа кривых на рис. 7 можно сделать вывод, что наилучшее ускорение достигается на большом числе блоков и при разбиении на тетраэдры. Аналогичные результаты наблюдаются и в связанных моделях, в которых расчетная область состоит из акустической и механической фазы, взаимодействующих друг с другом.

5. Заключение

В работе продемонстрирована возможность эффективного применения высокоточного аналитического метода (основанного на специальных разложениях по фундаментальным системам функций) для решения сложных задач волновой виброакустики. Метод включает в себя методику построения и вычисления аппроксимирующей системы функций с заданными аналитическими свойствами, а также может работать на крупных криволинейных блоках и контролировать точность решения. Эффективность метода в немалой степени предопределяется его реализацией на параллельных вычислительных системах, и основной ресурс параллелизма, используемый в настоящее время, это ресурс, связанный с независимыми вычислениями в различных блоках, осуществляемыми на основе графа разреженности матрицы. Это означает, что в параллельном режиме предпочтительнее использовать аналитический блочный метод при небольшой степени аппроксимации и на большом числе блоков. Однако численные эксперименты показывают, что метод также работает весьма эффективно при большой степени аппроксимирующих функций, и тогда можно использовать относительно небольшое число блоков. Это означает,

что естественным направлением дальнейшего развития параллельного метода блоков является использование возможностей многоядерных архитектур на параллельных системах с общей памятью.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-01-00051 и РФФИ № 07-01-13525 офи-ц.

Литература

1. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512с
2. *Волков-Богородский Д.Б.* Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики // Сборник трудов школы-семинара “Композиционные материалы”. – М.: ИПРИМ РАН, 2000. – С. 44-56.
3. *Волков-Богородский Д.Б.* Подход к задачам о взаимодействии акустической и упругой среды с помощью блочного метода мультиполей // “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. Материалы XI Международного симпозиума. – М.: МАИ, 2005. - Т. 2. - С. 17-22.
4. *Волков-Богородский Д.Б.* Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связанных задачах механики сплошных сред // Труды Всероссийской научно-практической конференции “Инженерные системы -- 2008”, Москва, 7-11 апреля 2008. – М.: РУДН, 2008. – С. 123-138.
5. *Волков-Богородский Д.Б., Харченко С.А.* Параллельные вычисления в методе блоков для связанных задач волновой виброакустики // Труды Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии”, Санкт-Петербург, 28 января – 1 февраля 2008 г. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – С. 347-352.
6. *Тихонов А.Н, Арсенин А.А.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1987. – 340с.
7. *George A., Liu J.W.* Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems // Series in Computational Mathematics. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
8. *Харченко С.А.* Влияние распараллеливания вычислений с поверхностными межпроцессорными границами на масштабируемость параллельного итерационного алгоритма решения систем линейных уравнений на примере уравнений вычислительной гидродинамики // Труды Международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии”, Санкт-Петербург, 28 января – 1 февраля 2008 г. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – С. 494-499.
9. *Kaporin I.E.* High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^T U + U^T R + R^T U$ decomposition // Numer. Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 5. – P. 483-509.
10. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A generalized minimum residual algorithm for solving non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Comput. – 1986. – V. 7. – P. 856-869.