Параллельное вычисление характеристического полинома матрицы *

О.Н. Переславцева

Приведено теоретическое и экспериментальное сравнение алгоритмов вычисления характеристических полиномов числовых и полиномиальных матриц. На основе этого анализа выбран алгоритм, который имеет асимптотически лучшее время, – алгоритм Данилевского с применением китайской теоремы об остатках (КТО). Рассматривается параллельный алгоритм Данилевского нахождения характеристического полинома полиномиальной матрицы от одной переменной. Подробно описывается его граф.

1. Введение

Вычисление характеристического полинома является фундаментальной задачей линейной алгебры. В настоящей работе рассматривается параллельный алгоритм вычисления характеристического полинома полиномиальной матрицы. Ранее в работах [1–3] для числовых матриц приводится теоретическое и экспериментальное сравнение следующих алгоритмов вычисления характеристического полинома: метод Леверье [4], метод Леверье-Фаддеева [5], алгоритм Чистова [6], алгоритм Берковича [7], алгоритм Сейфуллина [8], алгоритм Малашонка [9], новый алгоритм [10].

В работе [1] приведено теоретическое сравнение рассматриваемых алгоритмов для числовых матриц. Сравнивая количество операций над машинными словами, можно ожидать, что при вычислении характеристического полинома числовой матрицы алгоритм Сейфуллина окажется быстрее алгоритма Берковича в 1.1 раза, алгоритма Чистова в 2 раза и быстрее алгоритма Леверье-Фаддеева в 5 раз. Количество умножений слов в алгоритмах Леверье, Леверье-Фаддеева, Сейфуллина, Чистова и Берковича описывается полиномиальной функцией, а в алгоритме Малашонка и новом алгоритме – экспоненциальной функцией. Следовательно, среди рассмотренных прямых методов вычисления характеристического полинома для матриц с рациональными коэффициентами лучшим прямым алгоритмом является алгоритм Сейфуллина.

Оценки сложности в кольцевых операциях (операциях над коэффициентами матриц) показывают, что наименьшую сложность имеет новый алгоритм. Он требует $7/3n^3 + O(n^2)$ операций. Однако, для модулярной арифметики можно использовать и другие методы, в которых характеристический полином вычисляется для матриц над конечными числовыми полями. Метод Данилевского [11,12] требует выполнения $2n^3 + O(n^2)$ операций над элементами матриц над полем. Значит, этот алгоритм должен показывать лучшее асимптотическое время вычисления характеристического полинома при использовании китайской теоремы об остатках (КТО).

Были разработаны программы [2], реализующие алгоритм Сейфуллина, новый алгоритм [10] с применением КТО и алгоритм Данилевского с применением КТО. Эксперименты показали, что для матриц 35-го порядка и больше выигрывает алгоритм Данилевского, для матриц 15-го порядка и меньше – алгоритм Сейфуллина, а в интервале 15 - 35 нужно учитывать разрядность коэффициентов матрицы, с ростом разрядности преимущество растет у алгоритма Данилевского.

В работе [3] приведены результаты экспериментов для параллельного алгоритма Данилевского и параллельного нового алгоритма с применением КТО. Эксперименты проводились на кластере лаборатории алгебраических вычислений ТГУ им. Г.Р. Державина и на кластере Межведомственного Суперкомпьютерного Центра.

Ускорение вычислений для проведенных экспериментов находится в пределах от 50% до 98%. Наилучшее ускорение достигается, если количество процессоров является степенью числа 2. Это связано с тем, что графы алгоритмов представлены в виде бинарного дерева. Поэтому выгодно использовать параллельную машину на 2^p процессорах.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-07-97507) и программы "Развитие потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/1853).

Проведены эксперименты с прямым алгоритмом Сейфуллина и алгоритмом Данилевского с применением КТО вычисления характеристического полинома полиномиальной матрицы от одной переменной. Алгоритм Данилевского с применением КТО выигрывает у алгоритма Сейфуллина. Например, для плотной полиномиальной матрицы размера 20×20, элементы которой есть плотные полиномы степени 15, коэффициенты полиномов длиной 20 бит, он вычисляет характеристический полином быстрее в 2 раза, чем алгоритм Сейфуллина. Кроме того, алгоритм Сейфуллина является последовательным.

Применение КТО позволяет распараллелить алгоритм. Как показали эксперименты, применение КТО к алгоритму Сейфуллина не дает ускорения [2]. Поэтому для параллельного вычисления характеристического полинома полиномиальной матрицы асимптотически лучшее время будет у алгоритма Данилевского с применением КТО.

2. Параллельный алгоритм вычисления характеристического полинома полиномиальной матрицы

Рассмотрим подробно параллельный алгоритм вычисления характеристического полинома полиномиальной матрицы. Пусть $A = (a_{ij}(x)),\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n$, данная матрица. Выберем k простых чисел $p_1, \dots, p_k$ и перейдем к гомоморфным образам $\mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}[x]/p_i = \mathbf{Z}_{p_i}[x]$. Выберем m полиномов $x, x-1, \dots, x-(m-1)$ и перейдем к гомоморфным образам $\mathbf{Z}_{p_i}[x] \to \mathbf{Z}_{p_i}/(x-j) \sim \mathbf{Z}_{p_i},\ (0 \le j \le m-1)$. Получим km матриц $M_{ij} \in \mathbf{Z}_{p_i}^{n \times n},\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m$. Используя алгоритм Данилевского [11], для каждой матрицы M_{ij} найдем характеристический полином. Получим $k \cdot m$ полиномов $f_{ij}(y),\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le m$.

Фиксируем число p_i. Имея m образов $\{f_{i1}(y), f_{i2}(y), \dots, f_{im}(y)\}$ полинома, восстановим с помощью КТО полином $F_i(x, y)$. Затем по полученным полиномам $F_1(x, y), \dots, F_k(x, y)$ с помощью КТО восстановим по числовым модулям $p_1, \dots, p_k$ полином $F(x, y)$, который является характеристическим полиномом данной матрицы A.

Входными данными для параллельного алгоритма является матрица A и параметр bound. Этот параметр, который зависит от характеристик вычислительного кластера, определяет границу для параллельных вычислений. При достижении уровня bound распараллеливание становится не выгодным и все вычисления проводятся последовательно.

Предполагается, что запас простых чисел и простых полиномов определен заранее и хранится в двух списках на каждом процессоре.

Для заданной матрицы находим числа k и m, где $m-1$ – верхняя оценка степени характеристического полинома по переменной x, а число k задает количество простых чисел из заранее имеющегося списка простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$ $(r \ge k)$. Число k выбирается так, что наименьшее из произведений $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$ было вдвое больше наибольшего по модулю коэффициента характеристического полинома.

Граф алгоритма представляет собой бинарное дерево.

Граф алгоритма имеет 2 типа вершин. Вершина 1-го типа для числового распараллеливания, вершина 2-го типа для полиномиального распараллеливания.

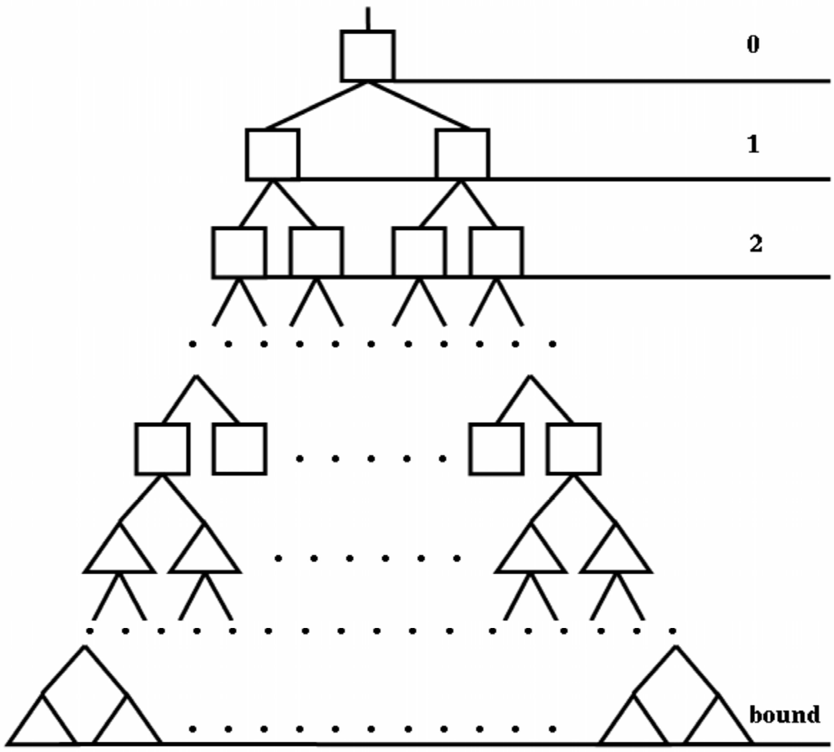

Рис. 1. Граф алгоритма.

Вершина 1-го типа.

На вход подается матрица A и числа $i1$, $i2$. Числа $i1$ и $i2$ задают соответственно номера первого и последнего простого числа из списка.

Результатом вычислений в вершине 1-го типа является полином $F_{sq}(x,y)$, восстановленный по набору чисел $p_{i1},\ldots,p_{i2}$. Т.е. это частично восстановленный характеристический полином по модулям $p_{i1},\cdots,p_{i2}$.

Для вершин 1-го типа возможны 2 случая:

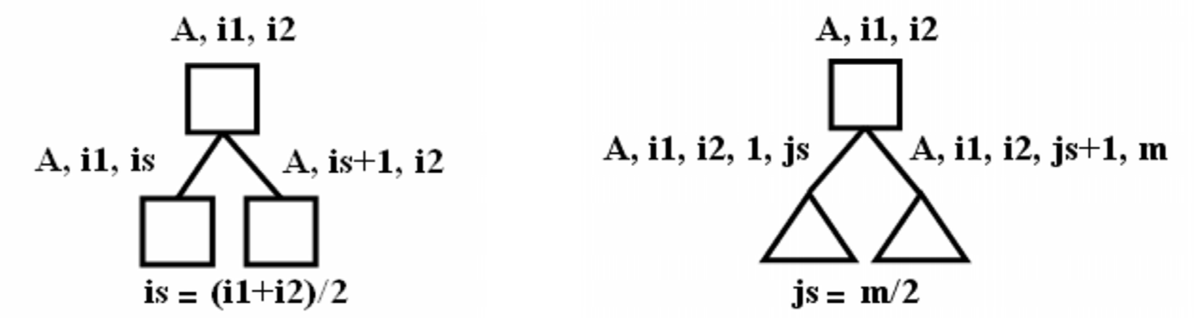

Рис. 2. Вершина 1-го типа (2 случая).

Вершина 1-го типа имеет две дочерние вершины.

В первом случае это вершины 1-го типа. И каждой из них пересылается половина списка простых чисел. Левой вершине на вход посылается матрица A и числа $i1$, is, правой – матрица A и числа $is+1$, $i2$, где $is=\lfloor (i1+i2)/2 \rfloor$. Вершина 1-го типа получает от дочерних вершин два полинома $F_{i1,i2}(x,y)\in \mathbf{Z}_{d1}[x,y]$ и $F_{i3,i4}(x,y)\in \mathbf{Z}_{d2}[x,y]$, где $d1=p_{i1}\cdots p_{i2}$ и $d2=p_{i3}\cdots p_{i4}$. Применяя КТО, в вершине вычисляем полином $F_{sq}(x,y)\in \mathbf{Z}_{d1\cdot d2}[x,y]$.

Во втором случае дочерние вершины являются вершинами 2-го типа. Левой вершине на вход посылается матрица A и числа $i1$, $i2$, 1, j. Правой – матрица A и числа $i1$, $i2$, $j+1$, m. Здесь $j=\lfloor m/2 \rfloor$. Вершина 1-го типа получает от дочерних вершин два списка полиномов $(f_{s,1})$ и $(f_{s,2})$, где $f_{s,1}\in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $f_{s,2}\in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $i1\le s\le i2$. Применяя КТО для полиномиальных модулей, вычисляем список полиномов $(f_s)\in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $i1\le s\le i2$. Используя теперь КТО для числовых модулей $p_{i1}, \ldots, p_{i2}$, находим полином $F_{sq}(x,y) \in \mathbf{Z}_{p_{i1} \cdots p_{i2}}[x,y]$.

И в первом и во втором случае вершина 1-го типа возвращает в качестве результата полином $F_{sq}(x,y)$.

Вершина 2-го типа.

На вход подается матрица A, числа $i1,\ i2,\ j1,\ j2$. Числа $i1$ и $i2$ – номера первого и последнего простых чисел из списка, $j1$ и $j2$ – номера первого и последнего полиномиальных модулей: $x - j1 + 1$ и $x - j2 + 1$.

В результате возвращается список полиномов $F_{tr} = (f_s)$, где $f_s \in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $i1 \le s \le i2$.

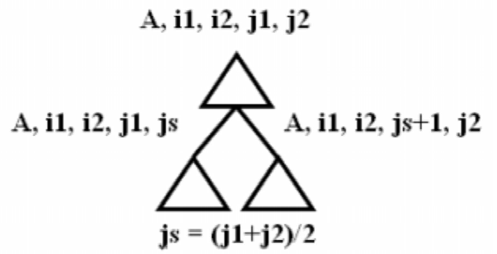

Рис. 3. Вершина 2-го типа.

Вершина 2-го типа имеет две дочерние вершины, каждая из которых является вершиной того же типа. Вершина 2-го типа распределяет задания следующим образом. Левой вершине на вход посылается матрица A и числа $i1,\ i2,\ j1,\ js$. Правой – матрица A и числа $i1,\ i2,\ js+1,\ j2$. Здесь $js = \lfloor (j1+j2)/2 \rfloor$. Вершина 2-го типа получает от дочерних вершин два списка полиномов $(f_{s,1})$ и $(f_{s,2})$, где $f_{s,1} \in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $f_{s,2} \in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $i1 \le s \le i2$. Применяя КТО для полиномиальных модулей, вычисляем список полиномов $F_{tr} = (f_s)$, $(f_s) \in \mathbf{Z}_s[x,y]$, $i1 \le s \le i2$.

Вершина 2-го типа возвращает в качестве результата список полиномов F_{tr}.

3. Заключение

Сравнительный анализ алгоритмов вычисления характеристических полиномов матриц показывает, что асимптотически лучшее время для последовательных и параллельных вычислительных машин имеет алгоритм Данилевского с применением КТО. Применение КТО для вычисления характеристического полинома полиномиальной матрицы дает возможность распараллелить алгоритм Данилевского. Граф алгоритма представлен в виде бинарного дерева. Граф имеет два типа вершин. Вершина 1-го типа для распараллеливания по числовым модулям. Вершина 2-го типа для распараллеливания по полиномиальным модулям. Можно предположить, наибольшее ускорение вычислений будет при использовании 2^p процессоров.

На основании этого графа разработана программа и проводятся эксперименты.

Литература

1. Переславцева О.Н. Оценка числа бит-умножений в алгоритмах вычисления определителя, характеристического полинома и присоединенной матрицы //XI Державинские чтения. Тамбов.- 2006.- С. 79-83.

2. Переславцева О.Н. Вычислительные эксперименты с алгоритмами вычисления характеристических полиномов матриц // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки. 2007. Т. 12. Вып.1. 126-128.

3. Переславцева О.Н. О вычислении коэффициентов характеристического полинома // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т.9. N.2. 180-185.

4. Le Verrier U.J.J. Sur les variations séculaires des éléments elliptiques des sept planétes principales: Mercure, Venus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus // Journal de Mathématiques Pures et Appliquees. 1840. N4. 220-254.

5. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Л.: Гос. изд. физ. мат. литературы, 1963.

6. Chistov A.L. Fast parallel calculation of the rank of matrices over a field of arbitrary characteristic // Proc. FCT '85, Springer Lecture Notes in Computer Science. 1985. 199. 147-150.

7. Berkowitz S.J. On computing the determinant in small parallel time using a small number of processors // Information Processing Letters. 1984. 18. 147-150

8. Сейфуллин Т.Р. Вычисление определителя, присоединенной матрицы и характеристического полинома без деления // Кибернетика и системный анализ. 2002. N.5. 18-42.

9. Малашонок Г.И. A computation of the characteristic polynomial of an endomorphism of a free module // Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 258. 101-114.

10. Переславцева О.Н. Метод вычисления характеристического полинома матрицы // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки. 2008. Т. 13. Вып.1. 131-133.

11. Данилевский А.М. О численном решении векового уравнения // Матем. сб. 1937. Т.2(44). N1. 169-172.

12. Икрамов Х.Д. О конечных спектральных процедурах в линейной алгебре // Программирование. 1994. № 1. 56-69