Сравнение двух подходов к управлению обработкой потока заявок в неоднородной вычислительной системе

Ю.А.Таммеоя

В работе рассматривается вычислительная система, состоящая из разнотипных вычислительных средств. Данной системой ведется обработка потока заявок (задач). Считается, что каждая вычислительная единица, входящая в состав системы, способна решить до конца любую из задач. Также предполагается возможность распараллеливания любой задачи. Целью исследования является анализ двух подходов по управлению обработкой заявок, с точки зрения максимальной интенсивности потока обработанных заявок. Полученные теоретические и практические результаты свидетельствуют о превосходстве варианта с распараллеливанием заявки над вариантом с обработкой заявки исключительно одним вычислительным средством.

1. Введение

Проведенное автором исследование, посвящено анализу функционирования неоднородной вычислительной системы при обработке непрерывного потока заявок. В настоящее время теория массового обслуживания, к которой относится и данная работа, является сложившейся дисциплиной. Имеются многочисленные публикации, посвященные исследованию, анализу и оптимизации работы систем массового обслуживания (СМО)[1,2]. Однако во многих исследованиях основной акцент делается на получении аналитических формул времени нахождения заявки в очереди и в системе. И действительно, данные показатели являются основными характеристиками эффективности работы СМО, и на их основе принимаются решении об изменении параметров СМО (число обрабатывающих каналов, размера буфера для поступающих заявок и т.д.).

К сожалению, по настоящий момент не удается разработать точных аналитических методов для многоканальных немарковских СМО[1]. Так, например, функционирование многоканальной СМО с потоком заявок, отличным от простейшего, непоказательным временем обслуживания заявки и неоднородностью каналов не поддается аналитической проработке. Однако для таких СМО можно рассмотреть вопрос максимальной интенсивности потока обслуженных заявок и осуществить анализ данного показателя при различных способах управления обработкой потока заявок.

2. Постановка задачи

Рассмотрим вычислительную систему из N вычислительных средств (например, компьютеров, процессорных ядер и т.д.). В рамках данной системы осуществляется решение потока из K различных задач. Далее будем считать, что любая компонента системы способна до конца решить любую из задач и любая задача допускает распараллеливание по N средствам.

Пусть матрица $T = \left(t_{ij}\right) \in R^{K \times N}$, $t_{ij} > 0$, задает время решения задачи i на компоненте j [3].

Поток решаемых задач характеризуется вектором $\vec{P} = \left(p_1, ..., p_K\right)$, $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$, $p_i > 0$, p_i – вероятность того, что очередная заявка является задачей i. Наложим еще одно ограничение на нашу модель. Будем предполагать, что в любой момент имеется задача, требующая решения, т.е. простаивать наша вычислительная система никогда не будет.

Введем два способа управления обработкой заявок.

1. Каждая компонента системы занята решением поступившей на нее задачи от начала и до конца. После завершения обработки очередной заявки, на данную компоненту поступает следующая задача.

2. Вся вычислительная система при таком подходе задействуется для решения одной задачи. Эта достигается распараллеливанием решения задачи по всем компонентам. При этом распараллеливание осуществляется таким образом, чтобы завершение выполнения своей части работы у всех компонент происходило одновременно. При наступлении этого момента задача считается решенной и на обработку в систему поступает следующая задача.

Приведем формулы подсчета интенсивности потока обслуженных заявок при каждом из вариантов управления обработкой. Обозначим их через I_1 и I_2.

$$I_1 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} p_i \cdot t_{ij}}$$

$$I_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t_{ij}}} \cdot p_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{t_{ij} \cdot p_i}}}$$

Покажем, что $I_1 \le I_2$ и исследуем условия, при которых достигается равенство. Обозначим $A_{ij} = p_i \cdot t_{ij}$. Далее будем анализировать обратные величины, т.е. $\frac{1}{I_1}$ и $\frac{1}{I_2}$.

$$\frac{1}{I_1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{ij}}}$$

$$\frac{1}{I_2} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{ij}}}$$

3. Теоретическая часть

Для доказательства основного результата данного исследования потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть даны два набора чисел $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$, $A_i > 0$, $B_i > 0$, $i = \overline{1,K}$. Тогда:

1) $$\frac{\left(\sum_{i=1}^{K} A_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} B_i\right)}{\sum_{i=1}^{K} A_i + \sum_{i=1}^{K} B_i} \ge \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i \cdot B_i}{A_i + B_i}$$

2) $$\frac{\left(\sum_{i=1}^{K} A_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} B_i\right)}{\sum_{i=1}^{K} A_i + \sum_{i=1}^{K} B_i} = \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i \cdot B_i}{A_i + B_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_i}{A_j} = \frac{B_i}{B_j};\ i, j = \overline{1,K}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $K = 2$.

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{2} A_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{2} B_i\right)}{\sum_{i=1}^{2} A_i + \sum_{i=1}^{2} B_i} - \sum_{i=1}^{2} \frac{A_i \cdot B_i}{A_i + B_i} = \frac{(A_1 + A_2) \cdot (B_1 + B_2)}{A_1 + A_2 + B_1 + B_2} - \frac{A_1 \cdot B_1}{A_1 + B_1} - \frac{A_2 \cdot B_2}{A_2 + B_2} =$$

$$= \{ \text{ приведем к общему знаменателю и раскроем скобки } \} =$$
$$= \{ \text{ рассмотрим числитель, получающегося выражения } \} =$$
$$= A_1^2 \cdot B_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot A_1 \cdot A_2^2 + B_2 \cdot A_1^2 \cdot A_2 + A_2^2 \cdot B_1 \cdot A_1 +$$
$$+ A_1^2 \cdot B_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot A_1 \cdot B_1 \cdot B_2 + A_1^2 \cdot B_2^2 + A_2 \cdot A_1 \cdot B_2^2 +$$
$$+ A_1 \cdot B_1^2 \cdot A_2 + A_2^2 \cdot B_1^2 + A_1 \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A_2 + A_2^2 \cdot B_1 \cdot B_2 +$$
$$+ A_1 \cdot B_1^2 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_1^2 \cdot B_2 + A_1 \cdot B_1 \cdot B_2^2 + A_2 \cdot B_2^2 \cdot B_1 -$$
$$- A_1^2 \cdot B_1 \cdot A_2 - A_2^2 \cdot A_1 \cdot B_1 - B_1^2 \cdot A_1 \cdot A_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot B_1 \cdot B_2 -$$
$$- A_1^2 \cdot B_1 \cdot B_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot B_1 \cdot B_2 - B_1^2 \cdot A_1 \cdot B_2 - B_2^2 \cdot A_1 \cdot B_1 -$$
$$- A_1^2 \cdot A_2 \cdot B_2 - A_2^2 \cdot A_1 \cdot B_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot B_1 \cdot B_2 - B_2^2 \cdot A_1 \cdot A_2 -$$
$$- A_1 \cdot A_2 \cdot B_1 \cdot B_2 - A_2^2 \cdot B_1 \cdot B_2 - B_1^2 \cdot A_2 \cdot B_2 - B_2^2 \cdot A_2 \cdot B_1 =$$

$$= \left(A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 \right)^2 \geq 0; \text{ Равенство достигается } \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Покажем теперь истинность леммы для произвольного K.
Рассмотрим правую часть неравенства леммы. Имеем:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i \cdot B_i}{A_i + B_i} = \sum_{i=1}^{K-2} \frac{A_i \cdot B_i}{A_i + B_i} + \frac{A_{K-1} \cdot B_{K-1}}{A_{K-1} + B_{K-1}} + \frac{A_K \cdot B_K}{A_K + B_K} = \{ \text{ используем лемму при } K = 2 \} \leq$$
$$\sum_{i=1}^{K-2} \frac{A_i \cdot B_i}{A_i + B_i} + \frac{\left(A_{K-1} + A_K \right) \cdot \left(B_{K-1} + B_K \right)}{A_{K-1} + A_K + B_{K-1} + B_K} \leq \dots \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{K} A_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} B_i \right)}{\sum_{i=1}^{K} A_i + \sum_{i=1}^{K} B_i} \quad (b).$$

Теперь осталось доказать второе утверждение леммы для произвольного K. Его истинность следует непосредственно из доказательства. Действительно, из приведенных выше выкладок следует, что равенство достигается тогда и только тогда, когда во всех переходах от выражения (a) к выражению (b) вместо знака "неравенство" используется "равенство". При первом переходе это равносильно истинности выражения:
$\frac{A_{K-1}}{A_K} = \frac{B_{K-1}}{B_K} = \alpha$, где $\alpha > 0$ – некоторое число. Продолжая двигаться от (a) к (b), используем в наших рассуждениях вместо значений A_{K-1} и B_{K-1} значения $A_K \cdot \alpha$ и $B_K \cdot \alpha$ соответственно. Тогда выражение $\frac{\left(A_{K-1} + A_K \right) \cdot \left(B_{K-1} + B_K \right)}{A_{K-1} + A_K + B_{K-1} + B_K}$ заменяем выражением $\frac{A_K (1+\alpha) \cdot B_K (1+\alpha)}{A_K (1+\alpha) + B_K (1+\alpha)}$.

При втором переходе имеем:

$\frac{A_{K-2}}{A_K \cdot (1+\alpha)} = \frac{B_{K-2}}{B_K \cdot (1+\alpha)} = \beta$, где $\beta > 0$ – некоторое число. Аналогично заменяем A_{K-2} и B_{K-2} выражениями $A_K \cdot (1+\alpha) \cdot \beta$ и $B_K \cdot (1+\alpha) \cdot \beta$ и т.д.

В конечном итоге справедливо $\frac{A_i}{A_K} = \frac{B_i}{B_K}, \quad i = \overline{1,K}$. Отсюда непосредственно вытекает истинность второго утверждения леммы. ■

Передем к доказательству основного результата данного исследования.

Теорема. Пусть дана матрица $A = (a_{ij}) \in R^{K \times N}$, $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1,K}$, $j = \overline{1,N}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $$\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{ij}}} \geq \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{ij}}}$$

2) $$\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{ij}}} = \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{ij}}} \Leftrightarrow \frac{A_{ls}}{A_{ms}} = \frac{A_{lp}}{A_{mp}}; l = \overline{1,K}, m = \overline{1,K},\ s = \overline{1,N}, p = \overline{1,N}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $N = 1, K$ – произвольное. Утверждение теоремы очевидно:

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{ij}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{i1}}} = \sum_{i=1}^{K} A_{i1}$$

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\frac{1}{A_{i1}}} = \sum_{i=1}^{K} A_{i1}$$

Докажем первое утверждение теоремы для случая $N > 1$. Доказывать будем методом от противного.

Пусть $\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{ij}}} < \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{ij}}}$ (I), тогда справедливо следующее неравенство:

$$1 - \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{ij}} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{ij}}} \right) < 0$$ или более подробно:

$$1 - \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{i1}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{i2}} + \ldots + \frac{1}{\sum_{i=1}^{K} A_{iN}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{1j}}} + \ldots + \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{A_{Kj}}} \right) < 0$$

Введем в рассмотрение числа $\tilde{N}_1, \ldots, \tilde{N}_K$:

$$\frac{1}{A_{1N-1}} + \frac{1}{A_{1N}} = \frac{A_{1N} + A_{1N-1}}{A_{1N} \cdot A_{1N-1}} = \frac{1}{\frac{A_{1N} \cdot A_{1N-1}}{A_{1N} + A_{1N-1}}} = \frac{1}{\tilde{N}_1}$$

...

$$\frac{1}{A_{KN-1}} + \frac{1}{A_{KN}} = \frac{A_{KN} + A_{KN-1}}{A_{KN} \cdot A_{KN-1}} = \frac{1}{\frac{A_{KN} \cdot A_{KN-1}}{A_{KN} + A_{KN-1}}} = \frac{1}{\tilde{N}_K}$$

Перепишем рассматриваемое неравенство с учетом введенных чисел $\tilde{N}_1, \ldots, \tilde{N}_K$:

$$1-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{i1}}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{i2}}+\ldots+\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN-1}}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-2}\frac{1}{A_{1j}}+\frac{1}{C_1}}+\ldots+\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-2}\frac{1}{A_{Kj}}+\frac{1}{C_K}}\right)<0$$

Заметим что:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN-1}}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN}}=\frac{\sum_{i=1}^{K}A_{iN}+\sum_{i=1}^{K}A_{iN-1}}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN}\cdot\sum_{i=1}^{K}A_{iN-1}}=\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{K}A_{iN}\cdot\sum_{i=1}^{K}A_{iN-1}}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN}+\sum_{i=1}^{K}A_{iN-1}}}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}\frac{A_{iN}\cdot A_{iN-1}}{A_{iN}+A_{iN-1}}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}C_i}$$

И, следовательно, верно неравенство:

$$1-\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{i1}}+\ldots+\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}A_{iN-2}}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{K}C_K}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-2}\frac{1}{A_{1j}}+\frac{1}{C_1}}+\ldots+\frac{1}{\sum_{j=1}^{N-2}\frac{1}{A_{Kj}}+\frac{1}{C_K}}\right)<0$$

Перейдем теперь от рассмотрения матрицы A к рассмотрению матрицы $\widetilde{A}$, которая получается из матрицы A отбрасыванием двух последних столбцов и приписыванием к ней столбца $\left(\tilde{N}_1,\ldots,\tilde{N}_K\right)^T$. Последнее неравенство показывает, что для матрицы $\widetilde{A}$ также выполняется неравенство (I).

Выполняя дальше процедуру по слиянию двух последних столбцов матрицы $\widetilde{A}$, вновь получится матрица удовлетворяющая (I) и т.д. В конце концов, получается матрица, состоящая из одного столбца $N=1$, для которой верно (I). Тем самым было получено противоречие.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично доказательству второго утверждения леммы. ■

4. Практическая часть

Автором был поставлен численный эксперимент по исследованию взаимного отношения значений интенсивностей для рассматриваемых в работе двух подходов по управлению обработкой заявок. Параметры вычислительной системы и потока заданий задавались случайно и равновероятно: $p_i=\frac{1}{K},\ i=\overline{1,K};\ t_{ij}$ - реализация случайной величины равномерно распределенной в интервале $[d_1,d_2]$.

Таблица. Результаты численного эксперимента.

№ эксперимента	K	N	$[d_1,d_2]$	I_2/I_1
1	10	10	[50, 150]	1.07
			[0.1,200]	1.92
2	10	100	[50, 150]	1.08
			[0.1,200]	3.01
3	100	10	[50, 150]	1.08
			[0.1,200]	1.92

4	100	100	[50, 150]	1.09
			[0.1,200]	3.06

5. Заключение

В результате проведенного исследования было теоретически показано, что подход к управлению обработкой заявок связанный с распараллеливанием каждого задания предпочтителен, при этом превосходство варианта с распараллеливанием заявки над вариантом с обработкой заявки исключительно одним вычислительным средством может достигать 3-х и более раз.

Литература

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1988

2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979

3. Левин В.И. Анализ производительности многомашинных вычислительных систем // Автоматика и вычислительная техника: 1984, № 5, с. 46-52.