

# Параллельные вычисления в методе блоков для связанных задач волновой виброакустики

Д.Б. Волков-Богородский, С.А. Харченко

Работа посвящена разработке параллельной версии алгоритмов, реализующих численно-аналитический метод блоков, применительно к связным задачам волновой виброакустики для установившихся гармонических колебаний при условии взаимодействия акустической среды и внешней упругой среды. В методе блоков решение ищется в виде локальных представлений в подобластях, точно удовлетворяющих системе уравнений в частных производных. Для удовлетворения граничным условиям и сшивки локальных представлений строится система функционалов, оптимизация которых приводит к блочной системе уравнений. Матрица системы комплексная, блочно-разреженная с плотными блоками. Параллельные вычисления эффективно используются при формировании и решении блочной системы уравнений.

## 1. Введение

В настоящей работе развиваются высокоточные аналитические методы решения краевых задач математической физики, основанные на "сложной аналитике", адекватно отражающей сущность задачи и помогающей ее эффективно решить. Эти методы основаны на точных представлениях решения в виде рядов по полным системам специальных функций, обладающих хорошими аппроксимативными свойствами, и позволяют контролировать точность получаемого решения. Ранее этот метод применялся для одного волнового уравнения Гельмгольца, и были выработаны алгоритмы сшивки локальных представлений и принципы работы с аналитическими представлениями в блоках. Эти алгоритмы переносятся в настоящей работе на более сложные задачи виброакустики, поскольку они могут быть описаны при помощи четырех волновых уравнений Гельмгольца. Большая размерность задачи предъявляет повышенные требования к используемым ресурсам, поэтому в работе решается вопрос о параллельной реализации алгоритмов блочного метода.

## 2. Метод блоков

Для решения связанных задач волновой виброакустики развивается специальный блочный аналитико-численный метод [1-5], использующий разбиение исходной области  $G$  на более простые односвязные подобласти-блоки с криволинейной границей,  $\bar{G} = \cup \bar{V}_k$ ,  $V_k \cap V_l = \emptyset$ ,  $k \neq l$  (см. рис. 1). Здесь  $S_{kl} = \partial V_k \cap \partial V_l$  – общая часть границы для соседних блоков,  $S_k = \partial V_k \cap \partial G$  – общая часть границы блока и области  $G$ , при этом кривизна границы исходной области учитывается точно.

Метод основан на аналитических представлениях поля акустического давления  $\Phi(P)$ , удовлетворяющего волновому уравнению Гельмгольца, и поля перемещений в упругой среде  $\vec{R}(P)$ , удовлетворяющего волновому уравнению Ляме, в виде разложений в ряды типа Тейлора по системе специальных функций [1,4], точно удовлетворяющих исходному уравнению. При этом используется обобщенное представление Нейбера-Папковича [2] для волнового уравнения Ляме, выражающее  $\vec{R}(P)$  через вспомогательное векторное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца. Таким образом, исходная задача сводится к нахождению четырех комплексных потенциалов, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца.

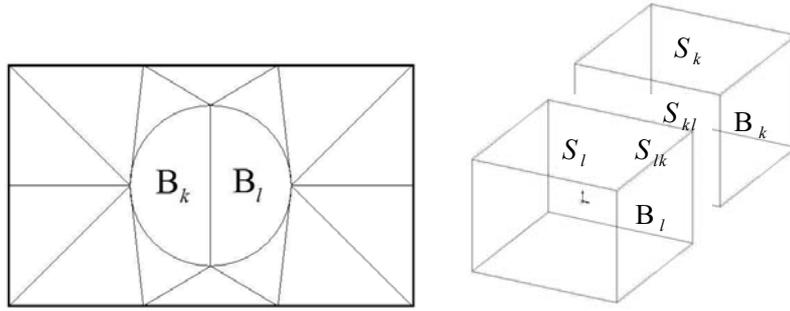


Рис. 1. Разбиение исходной области на криволинейные блоки

Сшивка локальных представлений в блоках осуществляется при помощи минимизации системы специальным образом сконструированных функционалов, содержащих энергетические слагаемые и квадратичную невязку для значений функций по границе блоков (см. [5]); такой подход приводит к симметричной блочной системе линейных уравнений. Возможны и другие варианты сшивки локальных представлений (см. [1,4]), в которых целиком используется метод наименьших квадратов для многоблочной структуры, позволяющий одновременно сшивать значения функций, нормальных производных и напряжений по границе блоков за счет минимизации специальным образом сконструированных функционалов квадратичной невязки. Такой подход приводит к блочной несимметричной системе линейных уравнений, и поэтому менее эффективен с вычислительной точки зрения.

Формирование функционалов в методе блоков осуществляется с помощью интегральной формулы Грина, позволяющей за счет точного удовлетворения локальных представлений дифференциальному оператору задачи свести вычисление энергетических слагаемых функционалов к интегрированию по криволинейной границе блоков. В конечном итоге это позволяет за счет специальным образом сконструированных квадратур Гаусса высокого порядка точно учитывать кривизну границы блоков, что важно для обеспечения высокой точности расчетов. При формировании функционалов учитываются также особые дифференциальные свойства базисной системы функций (см. [1,4]), вытекающие из способа их построения, позволяющие легко дифференцировать ряды при вычислении необходимых моментных характеристик.

Благодаря всему этому метод может работать и получать решение с высокой точностью на относительно небольшом числе крупных криволинейных блоков. При этом аппроксимация достигается за счет увеличения числа базисных функций в блоке. Метод позволяет также достигать необходимую точность и за счет разбиения исходной области на большое число блоков с небольшим числом базисных функций в блоке (как в методе конечных элементов). В обоих случаях имеется возможность контролировать точность получаемого решения за счет анализа нормы квадратичной невязки для функций из соседних блоков.

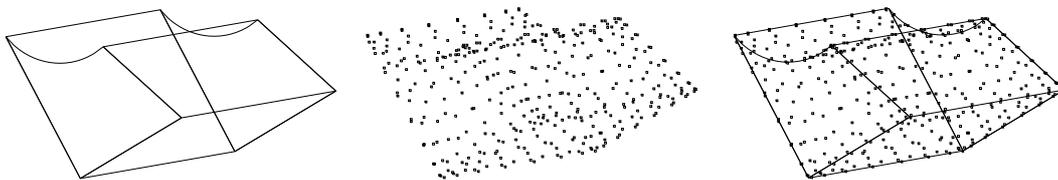


Рис. 2. Квадратуры Гаусса для криволинейных элементов блока

Для каждого блока  $B_k$  конструируется функционал, состоящий из энергетических слагаемых по всей поверхности блока и нормы квадратичной невязки по общей границе для функций из соседних блоков  $B_l$ . Для блоков  $B_k$  в акустической среде эти функционалы имеют следующий вид:

$$F_k = \int_{\partial B_k} \bar{\Phi}_k \left( \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} + \alpha \Phi_k - h_2 \right) ds + \beta \left( \|\Phi_k - h_1\|_{S_k}^2 + \sum_l \|\Phi_k - \Phi_l\|_{S_{kl}}^2 \right), \quad (1)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  означают заданное давление или скорость на границе области,  $\alpha = i\omega\rho/Z$  – нормированный аттмиданс на границе, черта над функцией  $\bar{\Phi}_k$  означает ее комплексное сопряжение,  $\beta$  – нормирующий коэффициент, принимающий большое значение. Для блоков  $V_k$  в упругой среде эти функционалы имеют аналогичный вид:

$$F_k = \int_{\partial B_k} \bar{R}_k (\bar{p}_k - \bar{h}_k) ds + \beta \left( \left\| \bar{R}_k - \bar{h}_k \right\|_{S_k}^2 + \sum_l \left\| \bar{R}_k - \bar{R}_l \right\|_{S_{kl}}^2 \right), \quad (2)$$

где  $\bar{p}_k$  – вектор поверхностных сил, соответствующий перемещениям  $\bar{R}_k$  в блоке. Для примыкающих блоков из акустической и упругой среды квадратичная невязка в функционале выражает условие непрерывности перемещений на границе между упругой и акустической средой. Заметим, что квадратичные слагаемые соответствуют жестким (необходимым) условиям функционала Лагранжа для связанной задачи (это непрерывность перемещений и давления); при выполнении условия непрерывности слагаемые квадратичной невязки отсутствуют в конструкции функционалов, и сконструированная система эквивалентна (с учетом формулы Грина) единому функционалу Лагранжа. Отметим также, что по отношению к функционалу квадратичной невязки энергетические слагаемые выполняют роль регуляризатора Тихонова [6].

### 3. Параллельная версия алгоритма

Минимизация системы функционалов (1), (2) приводит к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов в решении, имеющую естественную блочную структуру:

$$T_k \bar{X}_k + \sum_l T_{kl} \bar{X}_l = \bar{H}_k, \quad k=1, 2, \dots, N; \quad (3)$$

здесь  $T_k$  – матрица Грама аппроксимирующей системы функций,  $\bar{X}_k$  – неизвестные коэффициенты в разложении потенциалов в блоке  $V_k$ ,  $T_{kl}$  – матрицы, обеспечивающие сшивку локальных решений между блоками  $V_k$ ,  $V_l$  и состоящие из скалярных произведений аппроксимирующих функций этих блоков,  $\bar{H}_k$  – вектор граничных условий в блоке,  $N$  – общее число блоков. Размер каждого блока совпадает с числом неизвестных коэффициентов в локальном представлении решения.

Основной операцией при формировании блочной системы (3) является вычисление скалярных произведений моментных характеристик (скорость, тензор напряжений) аппроксимирующей системы функций, они вычисляются через производные до второго порядка. Здесь содержится значительный ресурс параллелизма, поскольку формирование блочной системы производится с помощью коллокационного вектора, составленного из значений аппроксимирующей системы функций в одной точке. Поэтому операции полностью независимы на уровне разных блоков и даже на уровне разных узлов в квадратуре Гаусса. Вычисление же моментных характеристик для колокационного вектора сводится к трехчленным рекуррентным преобразованиям в силу дифференциальных свойств используемой системы функций (см. [1,4]).

Основная специфика системы линейных уравнений (3) состоит в следующем:

- 1) аппроксимация строится на относительно небольшом числе элементов;
- 2) качество аппроксимации достигается, прежде всего, за счет увеличения числа базисных функций в блоке.

С точки зрения линейной алгебры матрица системы уравнений является комплексной плотно блочно разреженной матрицей, с относительно небольшим числом блоков и относительно большим размером каждого блока. Кроме того, в силу специфики построения системы среди диагональных блоков встречаются блоки с плохо обусловленной матрицей.

Распределение вычислительной работы по процессорам осуществляется и на этапе генерации, и на этапе решения систем линейных уравнений на основе анализа графа блочной разреженности матрицы по блочным строкам/столбцам матрицы исходной системы уравнений.

Будем говорить, что матрица системы уравнений (3) в некотором упорядочивании является блочно окаймленной, если ее структура разреженности имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 & C_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & A_p & C_p \\ B_1 & \dots & B_p & D \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где число строк в блоках  $A_i$  матрицы приблизительно одинаковое, и число строк в блоке  $D$  мало насколько это возможно и мало по сравнению с числом ячеек в каждом из блоков  $A_i$ . При этом блоки могут иметь свою структуру разреженности.

В этом случае окаймленной форме (4) матрицы системы уравнений естественно сопоставить такое же распределение данных по  $p$  процессорам: строки и столбцы матрицы соответствующие блоку  $A_i$  отдаются процессору с номером  $i$ , а данные блока  $D$  отдаются, например, процессору с номером 0.

Представлению (4) и описанному выше распределению данных по процессорам естественно также сопоставить дерево процессоров вида:

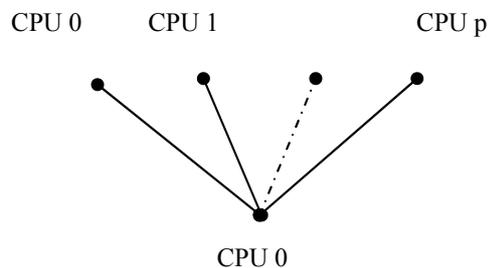


Рис. 3. Дерево процессоров

Здесь корень дерева соответствует блоку  $D$ , а ветви – блокам  $A_1, \dots, A_p$ . При организации параллельных вычислений, в соответствии с представлением (4) и при рассмотренном распределении данных по процессорам, зависимость между данными будет осуществляться в соответствии с ветвями этого дерева процессоров.

Блочная система уравнений решалась блочно масштабированным и блочно переобусловленным алгоритмом GMRES, в котором в качестве переобуславливания использовалось блочное неполное  $LU$  разложение второго порядка точности. Предварительно, перед вычислением разложения матрицы, проводится блочно-диагональное масштабирование системы уравнений, в результате которого диагональные блоки коэффициентов становятся единичными матрицами.

Неполное блочное разложение для системы (4) строилось на основе соотношения

$$A + E = L * U + L * R + W * U, \quad (5)$$

где блочно-треугольные матрицы  $L$  и  $U$  содержат блочные элементы разложения “первого порядка” точности, а блочно-треугольные матрицы  $W$  и  $R$  содержат блочные элементы “второго порядка”; матрица  $E$  – некоторая матрица ошибки. Это разложение строится как несимметричное блочное обобщение алгоритма из работы [7].

Итерации по решению системы уравнений проводятся с использованием переобусловленного варианта алгоритма GMRES [8]. Сам по себе, алгоритм GMRES основан на следующих матричных соотношениях:

$$b = P_1 g_1, \quad (6)$$

$$A * (LU)^{-1} * P_k = P_{k+1} * H_k, \quad (7)$$

где  $H_k$  – верхняя хессенбергова форма с размером  $(k+1) \times k$ ,  $b$  – вектор правой части,  $P_k$  – матрица с ортонормированными столбцами размера  $N \times k$ . Для построения матричных соотношений (6) и (7) требуется на каждой итерации алгоритма: умножение на матрицу  $A$ , реше-

ние систем уравнений с треугольными матрицами  $L$  и  $U$ , а также ортогонализация. Новое приближение к решению системы линейных уравнений (5) строится по формуле  $x_k = (LU)^{-1} * P_k * y_k$ , где  $y_k$  есть решение задачи минимизации  $\|H_k y_k - e_1 g_1\| = \min$ .

#### 4. Модельная задача

Модельная задача представлена на рис.4 и связана с распространением звука через перегородку. На нижнем рисунке представлена упрощенная модель – параллелепипед с размерами  $A \times B \times C$ , где  $A=1.2\text{ м}$ ,  $B=1\text{ м}$ ,  $C=2.4\text{ м}$ . На торце находится источник звука в виде вибрирующей квадратной вставки с размерами  $2a \times 2b$  ( $a=b=0.25\text{ м}$ ) с углом, закругленным радиусом  $r=0.08\text{ м}$ ; вставка вибрирует с заданной скоростью  $V_n=1\text{ м/сек}$ . Звук распространяется через упругую перегородку заданной ширины во вторую камеру, где полностью поглощается на противоположном торце. На остальных частях границы задано условие полного отражения.

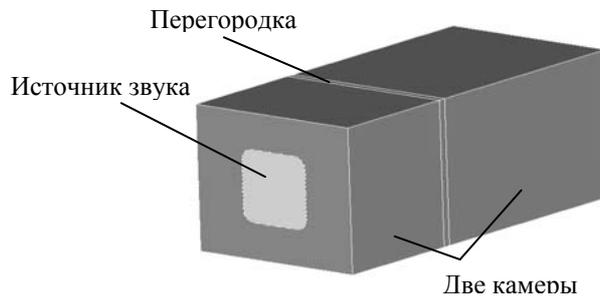


Рис. 4. Модель распространения звука через перегородку

Блочная структура задается разбиением торца и размером блоков вдоль оси  $Z$ ; на рис. 5 представлен характерный пример разбиения торца на криволинейные блоки, учитывающий закругление угла. На рис. 6 представлены результаты по масштабируемости параллельного алгоритма для модельной задачи при заданной частоте и при условии, что торец разбит на блоки в соответствии с рис. 5; вдоль оси  $Z$  выбрано равномерное разбиение на 64 части (учитывая перегородку), итого 2240 криволинейных блоков.

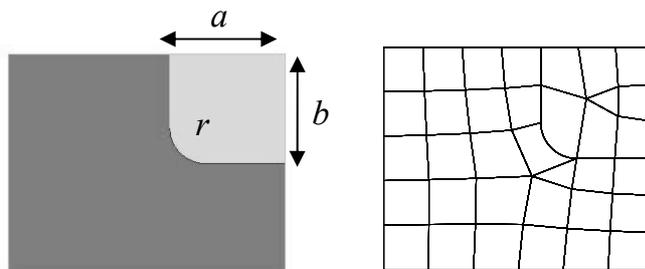


Рис. 5. Разбиение торца с источником звука на криволинейные блоки

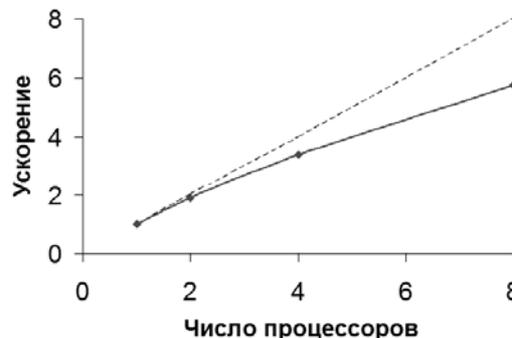


Рис. 6. Масштабируемость параллельного алгоритма ( $f=1000\text{ Hz}$ )

На рис. 7 в качестве иллюстрации представлено распределение картины звуковой волны (давление в шкале децибел) при определенной частоте, когда перегородка имеет небольшую щель, а стенка целиком вибрирует со скоростью  $V_n = 1 \text{ м/сек}$ .

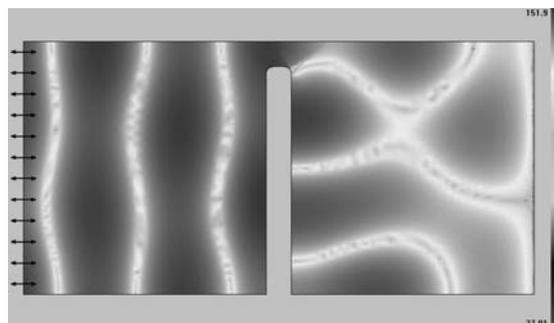


Рис. 7. Прохождение звуковой волны через небольшую щель в перегородке ( $f = 507 \text{ Hz}$ )

Основной ресурс параллелизма, использованный в данной работе, это ресурс, связанный с независимыми вычислениями в различных блоках, осуществляемыми на основе графа разреженности матрицы. При работе с алгоритмом блочного метода имеется и другой важный ресурс параллелизма, основанный на больших вычислениях внутри каждого блока (с учетом его локальной структуры разреженности). С развитием многоядерных архитектур открывается возможность эффективного использования и этого ресурса на параллельных системах с общей памятью; в будущем планируется развитие кода блочного метода в данном направлении.

Работа поддержана грантами РФФИ № 06-01-00051, РФФИ № 07-01-13525 офи-ц.

## Литература

1. Волков-Богородский Д.Б. Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики // Сборник трудов школы-семинара “Композиционные материалы”. – М.: ИПРИМ РАН, 2000. – С. 44-56.
2. Волков-Богородский Д.Б. Подход к задачам о взаимодействии акустической и упругой среды с помощью блочного метода мультиполей // “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. Материалы XI Международного симп. – М.: МАИ, 2005. – Т. 2. – С. 17-22.
3. Волков-Богородский Д.Б., Зубов В.И., Лурье С.А., Харченко С.А. Параллельные вычисления и идентификация в многопараметрических задачах теории межфазного слоя (наноккомпозиты) // Труды Всероссийской научной конференции “Научный сервис в сети Интернет”, Новороссийск, 24-29 сентября 2007 г. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007 – С. 123-126.
4. Волков-Богородский Д.Б. Применение блочного аналитико-численного метода мультиполей к задачам акустики // Вестник МАИ. – 2005. – Т. 12, № 3. – С. 51-60.
5. Волков-Богородский Д.Б. О вычислении эффективных характеристик композиционных материалов с помощью блочного аналитико-численного метода // “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. Материалы XII Международного симп. – М.: МАИ, 2006. – С. 41-47.
6. Тихонов А.Н, Арсенин А.А. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1987. – 340с.
7. Kaporin I.E. High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its  $U^T U + U^T R + R^T U$  decomposition // Numer. Linear Algebra Appl. – 1998. – V. 5. – P. 483-509.
8. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimum residual algorithm for solving non-symmetric linear systems // SIAM J. Sci. Comput. – 1986. – V. 7. – P. 856-869.